CAPITOLO 4

La geometria di Schwarzschild

Studieremo ora, come terzo esempio, la classica *metrica di Schwarzschild* (1916), la cui importanza sta nel fatto di essere la metrica dello spazio-tempo attorno a una sorgente a simmetria sferica. Condurremo perciò lo studio più a fondo che negli esempi precedenti, ma seguendo lo stesso approccio: supporremo di non conoscere affatto in partenza né l'interpretazione fisica della metrica, né tanto meno quella delle coordinate, e la dedurremo dalla discussione delle proprietà dello spazio-tempo che discendono dalla forma della metrica.

L'espressione della metrica di Schwarzschild è:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2M/r} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2) \qquad (4\text{–}1)$$

dove il parametro M, che per ora è arbitrario, avrà poi il significato di massa del corpo centrale che genera il campo gravitazionale. Ci converrà, per snellire le formule, assumere $2M$ come unità di lunghezza (e di tempo) e scrivere la (4–1) così:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 1/r} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2). \qquad (4\text{–}2)$$

Occorre indicare l'insieme di $\mathbb{R}^4$ in cui variano le coordinate:

$$t \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Dobbiamo anche precisare che $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$ rappresentano lo stesso punto, e inoltre che i punti con $\vartheta = 0$ e diversi φ coincidono, e lo stesso accade per $\vartheta = \pi$ (fig. 4–1). A rigore ciò significa che avremmo dovuto usare più carte (due per definire la "saldatura" fra $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, e altre due per i poli, dove la coordinata ϑ non è buona); ma questa scorrettezza non produce conseguenze gravi, mentre ci mantiene vicini all'uso comune. Discorso analogo va fatto per $r = 0$, dove entrambe le coordinate ϑ e φ sono "inutili," nel senso che per tutti i valori di ϑ e φ si ottiene sempre lo stesso punto della varietà: viene quindi a mancare la corrispondenza biunivoca tra punto e coordinate. Anche qui la soluzione rigorosa sarebbe di escludere $r = 0$, e aggiungere un'ulteriore carta per l'intorno di questo punto.

Aggiungiamo però che la topologia in grande, definita dalla saldatura delle carte, non è banale: ad es. con la stessa metrica in ϑ, φ:

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2$$

potremmo descrivere, oltre alla varietà più ovvia, che è la superficie di una sfera, anche una varietà del tutto diversa, nota ai matematici come "piano proiettivo."

A questo scopo occorrerebbe identificare le coppie di punti diametralmente opposti sulla sfera.

Interpretazione delle coordinate

Tornando alla (4–2), notiamo innanzitutto le invarianze evidenti a vista:

1) le traslazioni nella coordinata t
2) il gruppo SO(3) delle rotazioni nelle coordinate ϑ, φ.

Quest'ultima invarianza è la *simmetria sferica* della metrica, e ci autorizza a interpretare ϑ, φ come ordinarie coordinate polari.

Detto in altri termini: le sezioni $t = \text{cost.}$, $r = \text{cost.}$ del nostro spazio-tempo sono varietà S^2 (superfici di sfere nell'ordinario spazio euclideo 3-dimensionale). Si vede inoltre che la coordinata r ne misura il raggio, nel senso che $2\pi r$ è la lunghezza dei cerchi massimi e $4\pi r^2$ è l'area totale. Il secondo termine delle (4–2) mostra però che r *non è* la distanza della superficie dal centro; anzi dr non è neppure la distanza fra due sfere corrispondenti a r e a $r + dr$: questa distanza è invece

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - 1/r}}.$$

Ne segue che le sezioni $t = \text{cost.}$ *non sono euclidee.*

È bene osservare subito che nasce una difficoltà per $r \leq 1$, che discuteremo a fondo più avanti. Tale difficoltà ha due aspetti:

– per $r = 1$ appare una “singolarità” che potremmo sospettare fittizia per analogia con gli esempi precedenti, ma che andrà studiata
– per $r < 1$ i primi due coefficienti della metrica cambiano segno; la segnatura resta -2, ma sembra che t ed r si scambino i ruoli quanto al carattere temporale o spaziale.

Infine, si vede che per $r \gg 1$ la metrica (4–2) si riduce a quella di Lorentz–Minkowski, scritta in coordinate polari: dunque la geometria di Schwarzschild è *asintoticamente lorentziana.*

Il redshift gravitazionale

Se poniamo $r = \text{cost.}$, $\vartheta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ troviamo

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - \frac{1}{r}}.$$

Questo fatto, combinato con l'invarianza per traslazioni in t, mostra la presenza di un *redshift gravitazionale*:

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \sqrt{\frac{1 - 1/r_2}{1 - 1/r_1}}.$$

Per $r_2 = r_1 + h$, $r_1 \gg 1$ e $h \ll r_1$ si ha

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 1 + \frac{h}{2r_1^2}. \tag{4–3}$$

Se ricordiamo l'interpretazione fisica già accennata, tenendo presente che nelle nostre unità $g/c^2 = GM/c^2r^2$ si riduce a $1/2r^2$, ritroviamo il redshift già visto nel Cap. 2. Si vede anche che il coefficiente g_{tt} della metrica, nel caso limite di campi deboli, vale $1 + 2V(r)$, dove $V(r)$ è il potenziale newtoniano.

Una verifica sperimentale della (4–3) non approssimata richiede valori di r_1 ed r_2 ben diversi tra loro e non molto maggiori di 1. Questo è possibile solo su scala astronomica, e in situazioni piuttosto estreme. Consideriamo il caso di una nana bianca, la cui superficie — come vedremo — ha un r dell'ordine di 10^4. Per la radiazione che arriva a noi (r_2 praticamente infinito) la (4–3) si può scrivere

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = 1 + \frac{1}{2r_1}. \tag{4–4}$$

In qualche caso la verifica della (4–4) è stata possibile; la difficoltà è che occorre conoscere bene la *velocità radiale* della stella, altrimenti non si può separare il redshift gravitazionale dall'effetto Doppler.

Eliminazione della singolarità

Per la geometria di Schwarzschild sono stati inventati molti sistemi di coordinate, ciascuno dei quali ha particolari vantaggi e si presta meglio per discutere determinati problemi. Qui vogliamo occuparci della soluzione trovata indipendentemente da Kruskal e Szekeres nel 1960, che per brevità presentiamo senza spiegare come ci si può arrivare.

Tralasceremo d'ora in poi le coordinate angolari, che non vengono alterate. In luogo di t, r introduciamo u, v, con le equazioni di trasformazione seguenti:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= e^{r/2}\sqrt{r-1}\begin{pmatrix}\cosh t/2 \\ \sinh t/2\end{pmatrix} \qquad \text{per} \quad r > 1,\ u > |v| \\ &= e^{r/2}\sqrt{1-r}\begin{pmatrix}\sinh t/2 \\ \cosh t/2\end{pmatrix} \qquad \text{per} \quad r < 1,\ v > |u|.\end{aligned} \tag{4–5}$$

Si noti che le (4–5) per $r = 1$ sembrano dare $u = v = 0$, ma la situazione si capisce meglio cercando le trasformazioni inverse. Abbiamo in primo luogo

$$(r-1)\,e^r = u^2 - v^2 \tag{4–6}$$

dove la funzione di r a primo membro è strettamente crescente per $r > 0$ e perciò invertibile, anche se non si può dare un'espressione della funzione inversa mediante funzioni elementari. L'importante è che r dipende solo dalla combinazione $u^2 - v^2$: in particolare $r = 0$ per $v^2 - u^2 = 1$, $r = 1$ per $|u| = |v|$. Pertanto tutta la bisettrice del primo quadrante nel piano (u, v) corrisponde a $r = 1$.

Quanto a t, si trova

$$
\begin{aligned}
t &= 2\,\mathrm{tgh}^{-1}\,\frac{v}{u} \qquad \text{per } u > |v| \\
t &= 2\,\mathrm{tgh}^{-1}\,\frac{u}{v} \qquad \text{per } v > |u|.
\end{aligned}
\tag{4–7}
$$

Dalle (4–7) si vede che scambiando i valori di u e v si ottiene la stessa t, e che $t \to \infty$ quando $u/v \to 1$. Appare quindi chiaro che le coordinate u, v permettono di rappresentare senza singolarità una regione dello spazio-tempo più estesa di quella rappresentabile con t, r.

Dalle (4–6), (4–7) segue poi per la metrica:

$$
d\tau^2 = \frac{4}{r}\,e^{-r}\,(dv^2 - du^2). \tag{4–8}
$$

Sono opportune le seguenti osservazioni (fig. 4–2):

1) Le condizioni per u e v scritte a destra nelle (4–5) sono conseguenza delle equazioni di trasformazione: dunque nel piano (u, v) solo il semipiano al disopra della retta $u + v = 0$ è descritto dalle (4–5) (se si possa dare un'interpretazione dell'altro semipiano, è questione che qui non possiamo discutere).
2) Più esattamente, di questo semipiano conta solo la regione che sta sotto la curva $v = \sqrt{1 + u^2}$, che corrisponde a $r = 0$.
3) La metrica (4–8) non ha alcuna singolarità per $r = 1$ (si veda però al punto seguente). Compare invece una singolarità in $r = 0$, e si tratta di una singolarità reale, anche se ora non è possibile dimostrarlo.
4) La metrica (4–8) è lorentziana a meno di una trasformazione conforme: ne segue che le geodetiche nulle sono rette a 45°, il che semplifica l'interpretazione. In particolare si vede che $r = 1$ è un *orizzonte*: dai punti con $r < 1$ non è possibile trasmettere segnali a quelli con $r > 1$.
5) Le curve $r =$ cost. sono rami di iperboli, contenute nel quadrante $u > |v|$ per $r > 1$ e nel quadrante $v > |u|$ per $r < 1$. Si tratta quindi di curve temporali per $r > 1$, e spaziali per $r < 1$. Ne segue che è in linea di principio possibile tenere un oggetto fermo, ossia con r costante (ricordare che anche ϑ e φ sono costanti) solo se $r > 1$: sarebbe il caso di un'astronave coi motori accesi che compensano l'attrazione gravitazionale della massa M. Invece ciò riesce impossibile se $r < 1$: l'astronave cade inesorabilmente verso la singolarità in $r = 0$.
6) Le curve $t =$ cost. sono rette per l'origine; spaziali per $r > 1$, temporali per $r < 1$. Anzi, a uno stesso valore di t corrispondono due rette, una spaziale e una temporale.
7) Le traslazioni in t diventano trasformazioni di Lorentz per le u, v. Questo si vede dalle (4–5), ma è anche evidente che la metrica (4–8) è appunto invariante per trasformazioni di Lorentz. È quasi superfluo notare che questa

invarianza di Lorentz della metrica di Kruskal–Szekeres non ha niente a che vedere con la relatività ristretta.

Per approfondire lo studio della geometria di Schwarzschild occorre dotarsi di qualche altro strumento matematico; dedicheremo perciò l'inizio del prossimo capitolo a una precisazione del concetto di *geodetica*.