CAPITOLO 6

Applicazioni della geometria di Schwarzschild

In questo capitolo svilupperemo i risultati precedenti, relativi alle geodetiche della geometria di Schwarzschild, allo scopo di discutere alcune prove sperimentali della RG, e per esaminare un problema che preparerà il terreno per la discussione del collasso gravitazionale.

Le cosiddette "prove classiche" della RG sono com'è noto, tre:

a) il redshift gravitazionale, che abbiamo già trattato

b) la deflessione gravitazionale della luce, della quale ci occuperemo subito

c) la precessione del perielio di Mercurio, che tratteremo alla fine del capitolo.

Ci occuperemo poi di un'altra prova, non "classica," nel senso che non era stata anticipata da Einstein, come le altre: il ritardo che la luce subisce quando si propaga in vicinanza di una massa (ad es. il Sole).

La deflessione della luce

Partiamo dalla (5–11), e poniamo $r = b/u$. Combinando con la seconda delle (5–10) (con $J = b$):

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{u^3}{b} = 1.$$

Derivando questa rispetto a φ:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2}\,\frac{u^2}{b}. \tag{6–1}$$

Poiché siamo interessati al caso limite $b \gg 1$, tratteremo la (6–1) per via perturbativa: la soluzione "imperturbata" è

$$u = \sin\varphi \tag{6–2}$$

(abbiamo tenuto conto delle condizioni iniziali: $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$). Dalla (6–2) si ha $r\sin\varphi = b$, che mostra come la traiettoria della luce, in questa approssimazione, sia la retta che passa a distanza b dall'origine: risultato ovvio, perché stiamo trascurando gli effetti di RG, per cui la geometria spaziale è euclidea e la luce si propaga in linea retta.

Sostituendo la (6–2) nel secondo membro della (6–1) otteniamo

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2b}\,\sin^2\varphi = \frac{3}{4b}\,(1 - \cos 2\varphi).$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi + \gamma + \delta \cos 2\varphi + \varepsilon \sin 2\varphi$$

e troviamo le condizioni:

$$\gamma = \frac{3}{4b} \qquad \delta = \frac{1}{4b} \qquad \varepsilon = 0,$$

da cui

$$u = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi + \frac{3}{4b} + \frac{1}{4b}\,\cos 2\varphi.$$

Usando le condizioni iniziali troviamo dapprima $\alpha = -1/b$, e poi $\beta = 1$. Infine:

$$u = -\frac{1}{b}\,\cos\varphi + \sin\varphi + \frac{3}{4b} + \frac{1}{4b}\,\cos 2\varphi. \tag{6–3}$$

Indichiamo con $\pi/2 + \eta$ il valore di φ cui corrisponde il minimo di r (ossia il massimo di u). Derivando la (6–3):

$$\frac{1}{b}\,\sin\varphi + \cos\varphi - \frac{1}{2b}\,\sin 2\varphi = 0$$

$$\frac{1}{b}\,\cos\eta - \sin\eta + \frac{1}{2b}\,\sin 2\eta = 0$$

e trascurando i termini di ordine superiore in $1/b$:

$$\eta = \frac{1}{b}. \tag{6–4}$$

Come si vede dalla fig. 6–1, l'angolo di deflessione è 2η. Tornando alle unità usuali, dalla (6–4) si ricava per la *deflessione gravitazionale della luce* l'espressione:

$$2\eta = \frac{4\,GM}{c^2 b}. \tag{6–5}$$

Per la luce che passa radente al Sole si ha $b = 7 \cdot 10^5$ km, mentre GM/c^2, come abbiamo visto nel Cap. 1, vale circa 1.5 km. Il risultato più accurato per l'angolo di deflessione è $1.75''$.

Le prime verifiche sperimentali furono tentate subito dopo la formulazione della RG. Per molti anni il solo modo possibile è stato di fotografare un campo stellare in condizioni "normali," e poi quando nel campo era presente il Sole. Naturalmente la seconda fase dell'esperimento richiedeva che la luce del Sole fosse schermata in qualche modo, e la sola soluzione pratica era aspettare un'eclissi totale; con gli evidenti svantaggi (rarità dell'evento, collocazione geografica più o meno inaccessibile, soggezione ai fenomeni meteorologici). Per queste e altre ragioni le verifiche, sebbene complessivamente positive, davano sempre luogo a discussioni, in quanto era difficile evitare errori sistematici.

Solo in tempi relativamente recenti, grazie alla radioastronomia e alla scoperta delle quasar, si sono potute ottenere verifiche assai più soddisfacenti. In primo luogo perché le misure possono essere fatte in pieno giorno, dal momento che non si lavora nel visibile. Inoltre le quasar sono piuttosto numerose; infine la tecnica interferometrica a base continentale o intercontinentale (VLBI) consente risoluzioni angolari elevatissime, così che non è più necessario lavorare con radiazione radente al Sole, il che amplia di molto la statistica. Il risultato di tutto ciò è che oggi la (6–5) è verificata meglio dello 0.2%.

Luce emessa da una sorgente in caduta libera

Per il seguito c'interessa in particolare la propagazione radiale della luce. Dalla (5–9) con $d\varphi/d\lambda = 0$ si ottiene subito

$$dt = \pm \frac{r\,dr}{r-1}$$

che integrata dà

$$t = r + \ln(r-1) + \text{cost.} \tag{6–6}$$

(è stato scelto il segno + relativo alla luce uscente).

Consideriamo ora una sorgente in caduta radiale dall'infinito: vogliamo studiare come varia nel tempo l'intensità della luce ricevuta in una postazione fissa $r = R$. Detti t_e, t_r i valori di t alla partenza e all'arrivo della luce, dalla (6–6) abbiamo

$$t_\mathrm{r} - R - \ln(R-1) = t_\mathrm{e} - r_\mathrm{e} - \ln(r_\mathrm{e} - 1)$$

dove r_e e t_e sono dati dalle (5–7) e (5–8). Sostituendo (per $s > 1$):

$$t_\mathrm{r} = -\tfrac{2}{3}s^3 - s^2 - 2s - 2\ln(s-1) + R + \ln(R-1).$$

Per $s \to 1$ abbiamo

$$t_\mathrm{r} \to -2\ln(s-1) + \text{cost.}$$

da cui

$$s \to 1 + a\,e^{-t_\mathrm{r}/2}. \tag{6–7}$$

Differenziando questa e la seconda delle (5–7):

$$\frac{dt_\mathrm{r}}{d\tau} \to \frac{1}{a}\,e^{t_\mathrm{r}/2}.$$

Abbiamo dunque due effetti:

– Un redshift che va come $e^{t_\mathrm{r}/2}$. Questo è l'effetto combinato di due cause: l'aumento di velocità della sorgente (effetto Doppler), e il redshift gravitazionale.
– Un rallentamento nel ritmo di ricezione dei fotoni, con lo stesso fattore.

Si noti che l'intensità della luce non si annulla mai, sebbene il tempo (proprio) di caduta della sorgente oltre l'orizzonte sia finito.

Correzione per l'angolo solido

Tuttavia il calcolo così eseguito contiene un errore: studiando la sola propagazione radiale, non abbiamo tenuto conto che per una data area del ricevitore l'angolo solido alla sorgente varia durante la caduta. Dobbiamo dunque tornare alla propagazione non radiale. Dalle (5–10), (5–11) si ha, considerato che a noi interessa una propagazione quasi radiale, ossia con $b \ll 1$:

$$\frac{d\varphi}{dr} \simeq \frac{b}{r^2}$$

da cui

$$\varphi = -\frac{b}{r} + \mathrm{cost.}$$

Se poniamo $\varphi = 0$ alla partenza ($r = r_\mathrm{e}$) avremo (fig. 6–2)

$$\varphi = b\left(\frac{1}{r_\mathrm{e}} - \frac{1}{r}\right).$$

L'angolo α che la traiettoria della luce forma alla partenza con la direzione radiale è

$$\alpha = r_\mathrm{e}\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_\mathrm{e} = \frac{b}{r_\mathrm{e}}\left(\frac{dr}{dl}\right)_\mathrm{e} = \frac{b}{r_\mathrm{e}}\sqrt{\frac{r_\mathrm{e}-1}{r_\mathrm{e}}}$$

e l'angolo solido:

$$\omega = \pi\alpha^2 = \pi b^2\,\frac{r_\mathrm{e}-1}{r_\mathrm{e}^3}. \tag{6–8}$$

In un punto lontano ($r = R \gg 1$) avremo $\varphi_\mathrm{r} = b/r_\mathrm{e}$; l'area del ricevitore sarà

$$A = \pi R^2 \varphi_\mathrm{r}^2 = \pi R^2\,\frac{b^2}{r_\mathrm{e}^2}$$

e questa, combinata con la (6–8), ci dà

$$\omega = \frac{A}{R^2}\,\frac{r_\mathrm{e}-1}{r_\mathrm{e}}.$$

Fissata A, l'intensità ricevuta va come

$$\frac{r_{\rm e} - 1}{r_{\rm e}} \simeq s^2 - 1 \simeq 2a\, e^{-t_{\rm r}/2}.$$

Effetto del moto della sorgente

Il calcolo così eseguito per l'angolo solido vale però per una sorgente ferma; per una sorgente in moto manca ancora un fattore $(1-v)/(1+v)$, se v è la velocità della sorgente rispetto a un riferimento fermo nella geometria di Schwarzschild.

Si tratta di un problema di relatività ristretta: se consideriamo un fotone che viene emesso dalla sorgente, nel suo riferimento di quiete, con componenti p'_x, p'_y dell'impulso, e se la sorgente si muove rispetto al "laboratorio" con velocità v nel verso negativo dell'asse x, le componenti dell'impulso nel laboratorio sono

$$p_x = \gamma(p'_x - vE'), \qquad p_y = p'_y.$$

A noi interessa luce emessa in direzione poco diversa dall'asse x, per cui $p'_y \ll p'_x$ e quindi $E' \simeq p'_x$. Allora

$$\frac{p_y}{p_x} \simeq \frac{p'_y}{\gamma(1-v)\, p'_x}.$$

Poiché l'angolo α con l'asse x è piccolo, possiamo scrivere $p_y/p_x \simeq \alpha$, $p'_y/p'_x \simeq \alpha'$ e quindi

$$\alpha' \simeq \gamma(1-v)\, \alpha = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\, \alpha.$$

L'angolo solido del cono di semiapertura α è $\omega = 2\pi(1 - \cos\alpha) \simeq \pi\alpha^2$; arriviamo così a

$$\omega' = \frac{1-v}{1+v}\, \omega$$

come avevamo asserito. L'intensità della luce ricevuta si riduce per tale fattore, e occorre solo calcolare v.

Per il calcolo bisogna avere ben chiaro il significato di v: si tratta della velocità della sorgente, misurata in un laboratorio fermo nella geometria di Schwarzschild. La misura verrà fatta con metri e orologi del laboratorio, e occorre perciò connettere lunghezze e tempi del laboratorio con le coordinate di Schwarzschild.

Per la lunghezza avremo, dall'espressione della metrica, supponendo che vari soltanto r:

$$dl = \sqrt{\frac{r}{r-1}}\, dr.$$

Per il tempo, analogamente:

$$d\tau = \sqrt{\frac{r-1}{r}}\, dt$$

(qui $d\tau$ significa il tempo segnato da un orologio *fermo nel laboratorio*). Mettendo insieme:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{r}{r-1}\,\frac{dr}{dt}.$$

Basta ora far uso delle (5–7), (5–8), che danno le equazioni parametriche della geodetica percorsa dalla sorgente. A conti fatti si ottiene un risultato semplicissimo:

$$v = \frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{r_{\mathrm{e}}}}.$$

È interessante osservare che questo è esattamente lo stesso risultato che si otterrebbe col calcolo newtoniano.

Usando la (6–7) si vede che il nuovo fattore correttivo (per $s \to 1$) vale $\frac{1}{2}a\exp(-t_{\mathrm{r}}/2)$. Mettendo insieme le due correzioni per l'angolo solido, si ottiene un fattore che va come $\exp(-t_{\mathrm{r}})$, e perciò in totale

$$I_{\mathrm{r}} \sim e^{-2t_{\mathrm{r}}}.$$

Concludendo: l'intensità cade esponenzialmente, con una costante di tempo $1/2$, ossia GM/c^3 in unità ordinarie. Ad es. per $M = M_\odot$ si trova $5\,\mu$s.

Il ritardo gravitazionale

Vogliamo calcolare il tempo che la luce impiega ad andare da un punto a un altro del sistema solare, in particolare se passa radente al Sole. Poiché la deflessione gravitazionale è piccola, possiamo supporre che la traccia della geodetica sulle sezioni $t =$ cost. sia una retta del piano euclideo con le coordinate polari (r, φ):

$$r \sin\varphi = b$$

da cui

$$d\varphi = -\frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}}\,\frac{dr}{r}.$$

Il problema è allora molto semplice: dalla (5–9) si ricava

$$\begin{aligned}\frac{r-1}{r}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 &= \frac{r}{r-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \\ &= \left(\frac{r}{r-1} + \frac{b^2}{r^2-b^2}\right)\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\end{aligned}$$

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{r\,(r^3 - b^2)}{(r-1)^2\,(r^2-b^2)}.$$

Poiché $r \geq b \gg 1$, possiamo approssimare:

$$\frac{dt}{dr} = \left(r + 1 - \frac{b^2}{2r^2}\right) \frac{1}{\sqrt{r^2 - b^2}}.$$

Per il percorso da $r = b$ a $r = R$ abbiamo infine:

$$\begin{aligned} t(R) &= \int_b^R \left(r + 1 - \frac{b^2}{2r^2}\right) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \\ &= \int_0^{\bar{u}} \left(b \cosh u + 1 - \frac{1}{2\cosh^2 u}\right) du = b \sinh \bar{u} + \bar{u} - \tfrac{1}{2} \operatorname{tgh} \bar{u} \end{aligned}$$

avendo posto $r = b \cosh u$, $R = b \cosh \bar{u}$. Si arriva infine a

$$t(R) = X + \ln \frac{R + X}{b} - \frac{X}{2R}$$

dove $X = \sqrt{R^2 - b^2} = b \sinh \bar{u}$ è lo "spazio percorso." Se è $R \gg b$ si può confondere X con R:

$$t(R) = R + \ln \frac{2R}{b} - \frac{1}{2}. \qquad (6\text{–}9)$$

Il primo termine è il tempo necessario per percorrere la distanza R alla velocità $c = 1$; gli altri due termini danno il ritardo prodotto dalla curvatura dello spazio-tempo.

A titolo di esempio, consideriamo una sorgente sulla Terra, con luce che passa radente al Sole: allora $R/b = 220$ e $\ln(2R/b) = 6.1$. L'unità di tempo è quella in cui la luce percorre l'unità di lunghezza $2M$, che nel caso del Sole vale circa 3 km: quindi il ritardo ammonta a $55\,\mu$s.

Gli esperimenti sono stati condotti, da Shapiro e coll., non con luce visibile, ma con microonde, e con due diverse tecniche: eco radar e transponder. La differenza è questa: mentre nel primo caso si riceve il segnale riflesso dalla superficie di un pianeta (per es. Venere o Mercurio) nel secondo un rice-trasmettitore riceve il segnale, lo amplifica e lo riemette verso la Terra. Il primo sistema è più semplice, ma ha due inconvenienti: l'eco di ritorno è molto debole, e hanno grande influenza le caratteristiche della superficie del pianeta.

Il vantaggio del secondo sistema è evidente, ma bisogna disporre del transponder. In una prima fase si sono usati transponder a bordo di sonde spaziali, ma nasceva la difficoltà che le posizioni delle sonde sono difficili da calcolare, perché le sonde, a causa della piccola massa, sono soggette a numerose perturbazioni, anche non gravitazionali. In una seconda fase si è perciò cercato d'installare i transponder su di un pianeta: questo è stato possibile per Marte, a partire dal 1976.

In esperimenti del genere si ha un ritardo circa 4 volte maggiore di quello che abbiamo calcolato, cioè intorno a $210\,\mu$s. Questo per un segnale che passi radente al Sole. Occorre però osservare due cose:

a) Poiché i pianeti si muovono, la distanza fra la traiettoria del segnale e il centro del Sole varia. La legge di variazione è ben nota, dato che le orbite dei pianeti sono note con grande precisione. Si può quindi inserire nella (6–9), al posto di b, il suo valore a tempi successivi, e confrontare la curva risultante con le misure.

b) Sebbene in linea di principio possibile, è molto raro che la congiungente Terra-pianeta arrivi a essere radente al Sole. Questo perché le orbite dei pianeti non stanno tutte esattamente nello stesso piano. Perciò solo raramente riusciremo ad avere b uguale al raggio del Sole. Fortunatamente la dipendenza da b è logaritmica, per cui anche se b è più grande l'effetto non viene molto ridotto.

D'altra parte il passaggio della radiazione radente al Sole presenta un inconveniente: la regione attorno al Sole non è vuota di materia, ma è occupata da un plasma (la *corona* solare). Ovviamente il plasma influisce sulla propagazione delle onde e.m., sia nel senso di alterarne la velocità, sia di causarne una rifrazione (che disturba gli esperimenti di deflessione). Però è nota la dipendenza dell'indice di rifrazione del plasma dalla frequenza della radiazione, e si può quindi calcolarne l'effetto lavorando con due distinte frequenze.

Si noti infine che il nostro calcolo ci ha fornito la variazione nel tempo di Schwarzschild t, che a rigore non è il tempo segnato da un orologio. In un esperimento di eco l'orologio che segna il tempo è situato sulla Terra, di cui è ben nota posizione e moto: perciò la differenza fra t e τ, che è piccola ma non trascurabile, può essere calcolata senza problemi. Tenuto conto di tutto, gli esperimenti hanno confermato la teoria entro lo 0.1%.

La precessione del perielio dei pianeti

Riprendiamo la (5–15), e trasformiamola di nuovo con la sostituzione $r = J/u$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = E^2 - 1 + \frac{u}{J} - u^2 + \frac{u^3}{J}.$$

Derivando questa rispetto a φ e cancellando la derivata prima:

$$2\,\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{J} - 2u + \frac{3}{J}\,u^2. \qquad (6\text{–}10)$$

Se si potesse trascurare completamente il terzo termine a secondo membro, si otterrebbe per u un andamento sinusoidale:

$$u = \frac{1}{2J}\,(1 + e\cos\varphi)$$

da cui

$$r = \frac{2J^2}{1 + e\cos\varphi}.$$

Confrontando questa con l'equazione polare dell'ellisse di semiasse minore a ed eccentricità e

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi}$$

si vede che siamo ricaduti in un'orbita kepleriana, con $2J^2 = a\,(1 - e^2)$.

Questo risultato dimostra che il terzo termine è quello responsabile dell'effetto che stiamo cercando, e non possiamo quindi trascurarlo. Tenteremo allora una soluzione della (6–10) del tipo

$$u = \bar{u}\,(1 + e\cos k\varphi). \tag{6–11}$$

Il significato della (6–11) è il seguente. Se fosse $k = 1$ avremmo un'ellisse di eccentricità e e semiasse maggiore legato a $\bar{u}$ da $J/\bar{u} = a\,(1 - e^2)$. Il fatto che k possa essere diverso da 1 s'interpreta pensando a un'ellisse che "ruota," e che perciò non si chiude.

Sostituendo la (6–11) nella (6–10) e uguagliando i termini indipendenti da φ si trova

$$1 - 2J\bar{u} + 3\bar{u}^2 = 0,$$

che dà la relazione fra $\bar{u}$ e J: questa non c'interessa. Invece dai termini in $\cos k\varphi$ si ottiene

$$k^2 = 1 - \frac{3\bar{u}}{J} = 1 - \frac{3}{a\,(1 - e^2)}.$$

Il fatto che $k < 1$ significa che r oscilla periodicamente con φ, ma il periodo $2\pi/k$ *è maggiore di* 2π. Indicando con $\Delta\varphi$ lo scostamento da 2π, abbiamo:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{k} - 1\right) = 2\pi\left[\left(1 - \frac{3}{a\,(1 - e^2)}\right)^{-1/2} - 1\right] \simeq \frac{3\pi}{2a\,(1 - e^2)} \tag{6–12}$$

se $a \gg 1$, come accade per i pianeti. Dunque a ogni giro il perielio del pianeta *avanza di* $\Delta\varphi$ dato dalla (6–12).

Poiché l'avanzamento in un giro è inversamente proporzionale ad a, mentre il periodo del pianeta va come $a^{3/2}$ (terza legge di Keplero), l'effetto in un dato intervallo di tempo va come $a^{-5/2}$. È dunque massimo per Mercurio (vale $43''$ per secolo) e infatti era già stato osservato prima della metà del 19-mo secolo, e rimasto inspiegato: la spiegazione data da Einstein fu il primo grande successo della RG. In seguito la precessione è stata osservata anche per Venere, Terra e Marte: per questi pianeti l'avanzamento calcolato è rispettivamente di $8.62''$, $3.84''$ e $1.35''$ per secolo; l'accordo con le osservazioni è ottimo entro gli errori, di circa $0.1''$/secolo.