CAPITOLO 7

Le lenti gravitazionali

Dedicheremo questo capitolo a un argomento che ha avuto un significativo sviluppo negli ultimi anni, sebbene si basi su fondamenti teorici "classici," ossia sulla deflessione gravitazionale. Si tratta appunto delle *lenti gravitazionali.*

La possibilità di un "effetto lente" fu considerata da Lodge fin dal 1919; lo stesso Einstein nel 1936 previde la possibilità di quelli che oggi sono chiamati "anelli di Einstein," concludendo però che sarebbero stati inosservabili con gli strumenti dell'epoca. Infatti solo da poco più di vent'anni la situazione è cambiata, e si sono avute osservazioni positive. Occorre distinguere due ambiti: il primo è su scala cosmologica, dove la lente è costituita da un'intera galassia, e la sorgente da un quasar. Oggi sono note molte immagini in cui l'effetto lente è accertato oltre ogni dubbio: in tutti i casi si sono riconosciute immagini multiple della sorgente. Questo tipo di effetto richiede però che la lente consista di una distribuzione estesa di massa (appunto una galassia) e la teoria è più complicata.

Di recente è invece stato preso in esame un caso più semplice, che è quello di cui vogliamo qui occuparci (fig. 7–1): la luce di una sorgente S relativamente lontana (una stella) viene deviata da una "microlente" L costituita da una massa piccola e concentrata. Ne segue un'amplificazione nell'intensità della luce ricevuta da un rivelatore R.

Le osservazioni sono state effettuate prendendo come sorgenti stelle nelle Nubi di Magellano (distanti circa 50 kpc) e come possibili lenti oggetti dell'alone galattico, quindi a decine di kpc da noi. Lo scopo della ricerca è proprio di rivelare la presenza di MACHOs (MAssive Compact Halo Objects), ossia corpi non visibili con altri mezzi. Possibili candidati:

– nane brune, cioè "stelle mancate" perché di massa troppo piccola
– nane bianche spente
– stelle di neutroni
– buchi neri.

Schematizzazione del problema

Dobbiamo considerare tre punti: la sorgente S, la lente L, il rivelatore R. Indichiamo con D_S, D_R, le distanze della lente rispettivamente dalla sorgente e dalla proiezione R$'$ del rivelatore sulla retta SL; con r la distanza RR$'$.

Un raggio che da S raggiunge R dopo essere stato deflesso da L può essere ai nostri scopi rappresentato dai due asintoti, che sono due rette passanti rispettivamente per S e per R, e formanti tra loro un angolo $\vartheta = 2/b$ (6–4, 6–5). Possiamo assumere che b sia l'ordinata del punto Q comune ai due asintoti, e pensare LQ perpendicolare a SL: tutte queste posizioni introducono al più errori $O(1/b^2)$. S'intende che supponiamo $b, r \ll D_{\rm R}, D_{\rm S}$.

Per gli angoli $\vartheta_{\rm S}$, $\vartheta_{\rm R}$ si ha:

$$\vartheta_{\rm S} + \vartheta_{\rm R} = 2/b$$
$$D_{\rm S}\vartheta_{\rm S} = b \qquad D_{\rm R}\vartheta_{\rm R} = b - r$$

da cui l'equazione per b:

$$b^2 - b\,r' - b_{\rm E}^2 = 0 \tag{7–1}$$

avendo posto

$$b_{\rm E} = \sqrt{\frac{2D_{\rm R}D_{\rm S}}{D_{\rm R} + D_{\rm S}}} \qquad r' = \frac{D_{\rm S}r}{D_{\rm R} + D_{\rm S}}.$$

Il significato di $b_{\rm E}$ si vede facilmente ponendo $r = 0$ (S, L, R allineati): infatti in tal caso si trova $b = b_{\rm E}$ (torneremo tra poco su questo caso). Il significato di r' è invece chiaro dalla figura.

L'equazione (7–1) ha le due radici reali

$$b = \tfrac{1}{2}\left(r' \pm \sqrt{r'^2 + 4b_{\rm E}^2}\right)$$

che sono una positiva e una negativa. Un valore negativo per b significa che il raggio raggiunge R passando *sotto* alla lente, anziché sopra come si era assunto nella figura. Dunque in generale ci sono *due raggi* da S a R.

Dal momento che ci sono due raggi che vanno da S a R, possiamo dire che la lente L forma due immagini? Occorre tener presente che si potrà correttamente parlare d'immagine solo se almeno un sottile fascetto di raggi, dopo essere stato deviato dalla lente, passa per un unico punto (immagine *reale*) o se per un unico punto passano i loro prolungamenti all'indietro (immagine *virtuale*). Si potrebbe dimostrare senza difficoltà che nel nostro caso ciò non accade, neppure approssimativamente: il sistema ottico formato dalla lente è fortemente *astigmatico*. Ciò non produce conseguenze pratiche, perché tutti gli oggetti astronomici sono comunque a grandissima distanza, che può essere considerata infinita rispetto a qualsiasi sistema ottico che venga usato per l'osservazione.

L'anello di Einstein

Fin qui abbiamo limitato la discussione a un unico piano; ciò è lecito in quanto, finché S, L, R non sono allineati, i soli raggi che possono raggiungere R sono quelli che giacciono nel piano di questi tre punti. Fa eccezione il caso di perfetto allineamento ($r = 0$): allora i raggi che raggiungono R non sono soltanto due, ma tutto un cono, la cui semiapertura vale $\vartheta_{\rm R}$. Dunque in questo caso invece di due immagini si avrà un'intera circonferenza: appunto l'*anello* *di Einstein*. Il cono interseca il piano per L perpendicolare a SL secondo una circonferenza di raggio b_{E}: ecco il motivo della notazione usata.

È possibile osservare gli anelli di Einstein? Il problema sta nell'apertura del cono. Occorre una stima per ϑ_{R}, e questa è legata alle distanze di lente e sorgente: infatti nelle condizioni in cui si forma l'anello si ha

$$\vartheta_{\mathrm{R}} = \frac{b_{\mathrm{E}}}{D_{\mathrm{R}}} = \sqrt{\frac{2D_{\mathrm{S}}}{D_{\mathrm{R}}(D_{\mathrm{R}} + D_{\mathrm{S}})}}\,.$$

Ricordiamo ora che come unità di lunghezza si è assunta $2M$ (M massa della lente); tenendo conto di ciò, l'espressione per ϑ_{R} diventa

$$\vartheta_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{4MD_{\mathrm{S}}}{D_{\mathrm{R}}(D_{\mathrm{R}} + D_{\mathrm{S}})}}\,.$$

Anche se sorgente e lente sono piuttosto vicine, ad es.

$$D_{\mathrm{S}} = D_{\mathrm{R}} = 1\,\mathrm{kpc} = 3 \cdot 10^{16}\,\mathrm{km}$$

e se $M = M_\odot = 1.5\,\mathrm{km}$, si trova $\vartheta_{\mathrm{R}} = 10^{-8}\,\mathrm{rad} = 0.002''$, al limite delle possibilità attuali di risoluzione. Eppure abbiamo preso una distanza molto favorevole, e c'è da considerare che almeno alcune delle lenti possibili hanno masse decisamente minori del Sole: entrambi i fattori vanno a ridurre l'apertura del cono.

In effetti gli anelli di Einstein sono stati visti, ma in condizioni del tutto diverse: per es. se la lente è una galassia a 1 Gpc, con massa $10^{12}\,M_\odot$, la semi-apertura diventa $1''$. Bisogna osservare che su distanze così grandi non si potrà certo applicare la geometria euclidea, come abbiamo fatto; ma almeno l'ordine di grandezza non è sbagliato.

Le microlenti

Nel caso delle microlenti, ossia oggetti dell'alone galattico e di massa stellare o anche minore, l'osservabilità d'immagini o di anelli di Einstein, come abbiamo visto, è fuori questione. Tuttavia è stato osservato (Paczińsky, 1986) che in questo caso si può manifestare un'*amplificazione* della sorgente, e dall'andamento temporale della curva di luce si può ricostruire, in casi favorevoli, posizione e massa della microlente. Vediamo come si può fare una teoria del fenomeno.

Dobbiamo studiare la distribuzione dell'intensità della radiazione che arriva nel piano del rivelatore. A questo scopo, invece del singolo raggio fin qui considerato, bisogna prendere in esame un fascetto, che partendo dalla sorgente illumina una piccola area $d\sigma$. Usando coordinate polari, abbiamo $d\sigma = r\,dr\,d\varphi$, e in uscita da S avremo in corrispondenza un piccolo angolo solido $d\Omega = \sin\vartheta_{\mathrm{S}}\,d\vartheta_{\mathrm{S}}\,d\varphi$

($d\varphi$ resta lo stesso, per ragioni di simmetria attorno all'asse SL). Se la sorgente, supposta isotropa, ha luminosità L (potenza totale emessa), la potenza emessa in $d\Omega$ è $L\,d\Omega/4\pi$, e la stessa potenza arriverà su $d\sigma$.

Viceversa, in assenza di lente la potenza sarebbe stata semplicemente

$$\frac{L}{4\pi}\,\frac{d\sigma}{(D_{\rm R}+D_{\rm S})^2}.$$

Il rapporto fra le due potenze è l'amplificazione cercata:

$$\begin{aligned} A &= (D_{\rm R}+D_{\rm S})^2\,\frac{d\Omega}{d\sigma} = (D_{\rm R}+D_{\rm S})^2\,\frac{\sin\vartheta_{\rm S}\,d\vartheta_{\rm S}}{r\,dr} \simeq (D_{\rm R}+D_{\rm S})^2\,\frac{\vartheta_{\rm S}\,d\vartheta_{\rm S}}{r\,dr} \\ &= \left(\frac{D_{\rm R}+D_{\rm S}}{D_{\rm S}}\right)^2 \frac{b\,db}{r\,dr} = \frac{b\,db}{r'\,dr'}. \end{aligned} \tag{7–2}$$

Differenziando la (7–1) si ha

$$(2b-r')\,db = b\,dr'$$

e sostituendo nella (7–2):

$$A = \frac{b^2}{r'\,|2b-r'|}. \tag{7–3}$$

Il valore assoluto nella (7–3) è necessario per tener conto che nel caso di raggi che passano sotto L il denominatore è negativo, mentre l'amplificazione è positiva per definizione. Il fatto che esistano due raggi significa che in realtà dovremo sommare in A due contributi, dai due raggi:

$$A = \frac{b_+^2}{r'\,|2b_+-r'|} + \frac{b_-^2}{r'\,|2b_--r'|}$$

(si sono indicate con b_+, b_- le due radici della (7–1)).

Dunque:

$$\begin{aligned} A &= \frac{b_+^2}{r'\,(2b_+-r')} + \frac{b_-^2}{r'\,(r'-2b_-)} \\ &= \frac{b_+-b_-}{r'}\,\frac{(b_++b_-)\,r'-2b_+b_-}{-r'^2-2\,(b_+-b_-)\,r'-4\,b_+b_-} \\ &= \frac{r'^2+2\,b_{\rm E}^2}{r'\sqrt{r'^2+4\,b_{\rm E}^2}}\,. \end{aligned} \tag{7–4}$$

Dalla (7–4) si vede che per $r'=b_{\rm E}$, $A=3/\sqrt{5}\simeq 1.34$; possiamo assumere convenzionalmente questo come un valore di r' che dà amplificazione significativa. Ovviamente l'amplificazione sarà molto maggiore se $r'\ll b_{\rm E}$, e sembra anzi tendere a ∞ quando $r'\to 0$; torneremo tra poco su questo punto.

Cerchiamo di stimare le condizioni per avere $r' = b_\mathrm{E}$ in un caso realistico. Prendiamo $D_\mathrm{R} = 10\,\mathrm{kpc} = 3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{km}$ (dimensioni ragionevoli dell'alone galattico); $D_\mathrm{S} = 50\,\mathrm{kpc} = 1.2 \cdot 10^{18}\,\mathrm{km}$, come si avrà se la sorgente sta nella Grande Nube di Magellano; $M = 0.01\,M_\odot = 0.015\,\mathrm{km}$ (una nana bruna). Allora

$$b_\mathrm{E} = \sqrt{\frac{4MD_\mathrm{R}D_\mathrm{S}}{D_\mathrm{R} + D_\mathrm{S}}} = 1.2 \cdot 10^8\,\mathrm{km} \tag{7–5}$$

(poco meno di 1 UA).

Per valutare la fattibiità di una campagna di osservazione, occorre di più: serve una stima della probabilità di avere un allineamento entro questa distanza, cosa possibile se si fanno ipotesi sul numero di stelle sorgente che si possono esaminare, e sulla densità degli oggetti di alone candidati a fare da microlenti. Non possiamo qui dare ulteriori dettagli, ma la stima risulta incoraggiante.

La stima (7–5) di b_E permette di rispondere al problema posto dal possibile infinito nella (7–4). In primo luogo, osserviamo che alla (7–4) siamo arrivati assumendo la sorgente puntiforme, il che certamente non è. Occorrerebbe quindi rifare il calcolo tenendo conto della sua estensione, ed è intuitivo che ciò farebbe sparire la singolarità. Ma d'altra parte le dimensioni possibili della sorgente (una stella) sono generalmente piccole rispetto al valore di b_E, e questo è tanto più vero se si tiene presente che non conta il valore reale di r ma la sua proiezione r'. Perciò, a parte il caso di stelle giganti, o di microlenti di massa ancora più piccola, o di allineamenti assai precisi (ma rari), non abbiamo bisogno di correggere la (7–4).

Andamento temporale

Il fenomeno di microlente è osservabile solo in quanto *varia nel tempo*: ciò accade perché tutti gli oggetti coinvolti (L, R, S) si muovono. Perciò la grandezza r' varia, e di conseguenza varia l'amplificazione A. Senza approfondire il discorso, accenniamo a una possibile stima della scala di tempo in gioco. Si può stimare, per oggetti galattici, che le velocità (trasversali) relative siano dell'ordine di 200 km/s. L'evento avrà una durata stimabile dal tempo occorrente per attraversare una distanza dell'ordine di b_E: col valore (7–5), si trova $6 \cdot 10^5\,\mathrm{s}$, ossia 7 giorni. Il tempo va come la radice della massa della microlente.

Si vede quindi come andrà condotta la campagna di ricerca: si dovranno seguire un grande numero di stelle, per un tempo abbastanza lungo (dell'ordine dell'anno). Si cercherà un aumento di luminosità, e successiva discesa. Il problema è come distinguere questa variazione da quella di una stella variabile (fenomeno tutt'altro che raro). I criteri sono essenzialmente due:

a) L'andamento temporale per l'effetto microlente è ben determinato a partire dalla (7–4); in particolare dev'essere esattamente simmetrico nel tempo, cosa che di solito non è per le curve di luce delle variabili.

b) L'effetto, come del resto la deflessione gravitazionale, è *non dispersivo*: si presenta identico a tutte le lunghezze d'onda. Invece in una variabile è normale un cambiamento delle caratteristiche spettrali della luce.

Le ricerche sono in corso da oltre 10 anni, e già nel 1993 si sono avuti i primi casi positivi.