CAPITOLO 18

Il tensore energia-impulso in RG

La definizione del tensore energia-impulso si trasporta senza difficoltà in RG, basandosi sul principio di equivalenza. Basta infatti partire da un RIL, dove possiamo aspettarci che sia definito un tensore **T** con le proprietà già viste: simmetrico a divergenza nulla e con le componenti interpretate come in RR. Non resta poi che estendere la definizione del tensore a un arbitrario riferimento, e a coordinate qualsiasi; la simmetria verrà mantenuta, e così pure l'annullarsi della divergenza. Solo che l'espressione esplicita di $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ in componenti richiederà l'intervento dei coefficienti di connessione nella derivata covariante.

Per le stesse ragioni non c'è niente da cambiare nelle espressioni viste per **T** nei diversi esempi; potremo quindi far uso in seguito del tensore energia-impulso di un fluido perfetto nella forma (17–10) oppure (17–11).

Lo scopo di questo capitolo è però una discussione generale delle leggi di conservazione in RG, mentre rimandiamo ai successivi l'applicazione delle equazioni a situazioni particolari d'interesse astrofisico.

Il campo asintotico di un sistema chiuso

Cominciamo col supporre che per il sistema fisico che c'interessa valga ovunque (anche nella regione occupata dalla materia) l'approssimazione di campo debole; possiamo allora calcolare il tensore metrico dalle (16–14), ad es. come "potenziali ritardati" (basta pensare all'analogia con l'elettrodinamica). A noi interessa ora studiare la geometria dello spazio-tempo *a grande distanza* dalla regione occupata dalla materia: basterà fare lo stesso sviluppo in multipoli che si usa in elettrodinamica, ed è logico attendersi che anche qui i termini dominanti siano determinati da pochi parametri globali della materia (ricordiamo che in elettrodinamica il termine dominante $\propto 1/r$ del potenziale scalare dipende solo dalla carica totale e quello del potenziale vettore, che va come $1/r^2$, è determinato dal momento di dipolo magnetico).

Il risultato, in un opportuno sistema di coordinate, è il seguente (v. ad es. *Gravitation* per i dettagli del calcolo):

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2M}{r} + O(r^{-3}) \\ g_{0i} &= 2\,\varepsilon_{ijk}\,S^j\,\frac{x^k}{r^3} + O(r^{-3}) \\ g_{jk} &= -\left(1 + \frac{2M}{r}\right)\delta_{jk} + g'_{jk} \end{aligned} \tag{18–1}$$

dove g'_{jk} sta a indicare termini (non statici) di radiazione gravitazionale, che vanno come $1/r$. *Nota*: $\varepsilon_{123} = 1$.

Nelle (18–1) compaiono i parametri M e S^j, che sono massa e spin del sistema (in realtà le (18–1) valgono nel riferimento del centro di massa, in cui $S^0 = 0$). Dunque se possiamo trascurare le onde gravitazionali la metrica dipende solo da 4 parametri globali del sistema, e non dai dettagli della sua costituzione interna.

Viceversa, ne segue che possiamo usare il campo asintotico per misurare massa e spin del sistema. Per la massa la cosa è ovvia: è quello che si fa sempre in astronomia, ad es. mediante il periodo di un satellite. Per lo spin non è altrettanto ovvio, ma si dimostra che i termini non diagonali (i soli che dipendono dallo spin) provocano una precessione di un giroscopio: dalla grandezza e direzione della velocità angolare di precessione si ricava il vettore $\vec{S}$. A titolo di esempio: l'effetto in vicinanza della Terra è di circa $0.1''$/anno; un esperimento è da tempo in corso di progettazione.

Anche se si abbandona l'ipotesi di campo debole, si dimostra che le (18–1) valgono ancora, a meno di termini $O(1/r^2)$ negli elementi diagonali, che derivano da effetti non lineari. Non descriveremo il calcolo in dettaglio, ma solo le linee generali.

L'idea è che a grande distanza sarà ancora valida l'approssimazione lineare. Si usa allora la forma generale della soluzione nel vuoto, si studiano i termini dominanti a grande distanza, e si sfrutta la scelta del sistema di riferimento e della gauge per semplificare il risultato: si ottengono di nuovo le (18–1).

La differenza essenziale è che ora i parametri M e S^i non possono essere definiti dal tensore energia-impulso del sistema, perché la geometria in vicinanza della sorgente non è lorentziana; per di più *non sono esattamente costanti del moto* a causa degli effetti di radiazione gravitazionale, che in generale fanno decrescere massa e spin del sistema.

Leggi di conservazione nella teoria generale

Abbiamo visto che il campo asintotico dipende dai parametri M e S^i; più in generale, cambiando riferimento (non più quello di quiete) avremo una dipendenza da P^α, $J^{\alpha\beta}$. Non possiamo però usare le leggi di conservazione valide in relatività ristretta (e quindi anche nella teoria linearizzata): come dobbiamo procedere?

L'idea è di sostituire alle espressioni di P^α, $J^{\alpha\beta}$ come integrali di volume di $T^{\alpha\beta}$ degli integrali di superficie. Infatti la superficie può essere presa *molto lontano* dalla materia, in una regione dove l'approssimazione lineare è lecita. La tecnica è la seguente. Pensiamo per il momento alla teoria linearizzata, e poniamo

$$H^{\alpha\mu\beta\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -(\eta^{\mu\nu}\,\bar{h}^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}\,\bar{h}^{\mu\nu} - \eta^{\alpha\nu}\,\bar{h}^{\mu\beta} - \eta^{\mu\beta}\,\bar{h}^{\alpha\nu}). \tag{18–2}$$

Si verifica anzitutto che $H^{\alpha\mu\beta\nu}$ ha le stesse simmetrie del tensore di Riemann; va però osservato che non è gauge invariante (con opportuna scelta delle coordinate si può sempre annullare $H^{\alpha\mu\beta\nu}$ e le sue derivate in un punto: verificare!) Ciò è quanto dire che non è un tensore rispetto a trasformazioni arbitrarie di coordinate.

In termini di questo "tensore" le equazioni di Einstein si scrivono in modo semplice:

$$H^{\alpha\mu\beta\nu}{}_{,\mu\nu} = 16\pi\, T^{\alpha\beta} \tag{18–3}$$

e se ne deduce l'equazione di conservazione per $T^{\alpha\beta}$:

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0.$$

Abbiamo poi:

$$\begin{aligned} P^\alpha &= \int_V T^{\alpha 0}\, dV = \frac{1}{16\pi} \int_V H^{\alpha\mu 0\nu}{}_{,\mu\nu}\, dV \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_V H^{\alpha\mu 0j}{}_{,\mu j}\, dV = \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma H^{\alpha\mu 0j}{}_{,\mu}\, n_j\, d\Sigma \end{aligned} \tag{18–4}$$

dove Σ è il contorno di V e n_j la normale uscente. Abbiamo così espresso, come annunciato, P^α come integrale di superficie. Allo stesso modo si trova:

$$J^{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma (x^\alpha H^{\beta\mu 0j}{}_{,\mu} - x^\beta H^{\alpha\mu 0j}{}_{,\mu} + H^{\alpha j 0\beta} - H^{\beta j 0\alpha})\, n_j\, d\Sigma. \tag{18–5}$$

Il punto importante è che le (18–4), (18–5) richiedono solo la conoscenza del tensore metrico lontano dalla materia; possiamo quindi usarle come *definizioni* di P^α, $J^{\alpha\beta}$ anche nel caso generale, in cui la teoria linearizzata non è valida nella regione interna. Naturalmente da P^α, $J^{\alpha\beta}$ si definiscono poi X^α, S^α come al cap. precedente.

Osserviamo che mentre gli integrandi delle (18–4), (18–5) non sono gauge invarianti *gli integrali lo sono*, ed è quello che conta. Si vede anche che condizione necessaria (e sufficiente) per il nostro ragionamento è che lo spazio-tempo sia asintoticamente lorentziano. Ne segue che *è possibile definire impulso, energia e momento angolare di un sistema materiale solo se esso si trova in uno spazio-tempo asintoticamente lorentziano.*

Un controesempio è dato ovviamente da un modello cosmologico a curvatura non nulla: dobbiamo concluderne che allora tutto il nostro discorso è privo di senso, se l'Universo è dotato di curvatura? La risposta sta nella diversa scala di dimensioni: il raggio di curvatura dell'Universo è così grande rispetto non solo al sistema solare, ma anche a una galassia, che è un'ottima approssimazione trattarlo come infinito (Universo piatto) finché non siamo direttamente interessati a questioni cosmologiche.

Esiste un tensore energia-impulso del campo gravitazionale?

Concludiamo questo capitolo con una breve discussione della questione posta nel titolo, che ha dato molto lavoro agli esperti, da quando esiste la RG. Come sappiamo, in un sistema legato da interazione elettrostatica si può definire un tensore energia-impulso del campo elettromagnetico, che contribuisce in tutti i sensi alle proprietà gravitazionali del sistema (curvatura dello spazio-tempo). Poiché nella teoria newtoniana anche la forza di gravità è una forza conservativa, non diversamente da quella di Coulomb, appare naturale procedere allo stesso modo per un sistema legato gravitazionalmente; del resto abbiamo visto sopra che in effetti si può definire massa, spin ecc. per un sistema anche se sono presenti forti interazioni gravitazionali. Sembra quindi che si possa parlare anche di un tensore energia-impulso del campo gravitazionale.

La questione può essere impostata formalmente come segue. Supponiamo noto il tensore metrico in tutto lo spazio-tempo, inclusa la regione dove è presente materia: esso soddisferà ovviamente le equazioni di Einstein. Da $g_{\alpha\beta}$, definiamo $h_{\alpha\beta}$ così:

$$h_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \tag{18–6}$$

(non facciamo l'ipotesi che $h_{\alpha\beta}$ sia piccolo). Da $h_{\alpha\beta}$ così definito, definiamo poi $H^{\alpha\mu\beta\nu}$ come nella (18–2), e calcoliamo $H^{\alpha\mu\beta\nu}{}_{,\mu\nu}$; definiamo infine

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{16\pi}\, H^{\alpha\mu\beta\nu}{}_{,\mu\nu}. \tag{18–7}$$

Ovviamente $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ *non è* il tensore energia-impulso della materia; ma sappiamo dalla (18–3) che lo sarebbe al limite di campo debole. In ogni caso si vede dalla (18–7) che è sempre esattamente $\tilde{T}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$. Se dunque scriviamo

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + T_*^{\alpha\beta}$$

potremmo arrivare alla conclusione che $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ ha tutte le proprietà richieste a un tensore energia-impulso:

- ha divergenza nulla
- compare a secondo membro in un'"equazione di Einstein" (si confronti la (18–7) con la (18–3)) uguale a quella che vale al limite di campo debole.

Che cosa dunque ci impedisce di dire che $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ è il tensore totale di energia-impulso, consistente della somma di quello $T^{\alpha\beta}$ della materia e di quello $T_*^{\alpha\beta}$ "del campo gravitazionale"? La risposta è che $\tilde{T}$ e T_* *non sono tensori*, perché le loro definizioni non sono gauge invarianti: dipendono dalla scelta del sistema di coordinate, come si vede dalla (18–6).

Si può anche descrivere la situazione come segue: sempre dalla (18–6) si vede che T_* conterrà in generale le derivate seconde del tensore metrico; si riesce tuttavia, con una trasformazione di gauge, a dargli una forma particolare, che contiene solo le derivate prime. Anzi con tale scelta si verifica che T_* si annulla quando tali derivate si annullano. Ora è sempre possibile scegliere il sistema di coordinate (ad es. coordinate lorentziane in un RIL) in modo tale che le derivate prime di $g_{\alpha\beta}$ (ossia i coefficienti di connessione) si annullino: allora $T_* = 0$ e il campo gravitazionale non contribuisce più al tensore energia-impulso.

Dunque la tentata decomposizione di $\tilde{T}$ in $T + T_*$ *non ha significato fisico*: non si può definire una *densità locale* di energia e impulso del campo gravitazionale. Si noti che invece, grazie alla (18–7), si potrà sempre calcolare P^α e $J^{\alpha\beta}$ come già visto. Confermiamo così quello che ci era noto: *l'interazione gravitazionale contribuisce alle proprietà globali* (massa, impulso, momento angolare) del sistema.