CAPITOLO 20

La scelta di un'equazione di stato

Noi siamo interessati agli stati finali dell'evoluzione stellare, ossia quelli che si raggiungono quando la stella ha perduto tutta l'energia possibile. In particolare, all'interno della stella non avranno più luogo reazioni nucleari, né trasporto di materia e/o radiazione. Supporremo però che questo stato finale sia stato raggiunto gradualmente (non sia un equilibrio "congelato") in modo che la materia presente si trovi effettivamente nello stato di energia minima.

Nota: È opportuno osservare che nelle stelle reali si possono avere situazioni diverse: se ad es. il nucleo di una stella consiste soltanto di He, e la temperatura non è sufficientemente alta (almeno $10^8\,\mathrm{K}$) non sono più possibili reazioni nucleari.

Tornando allo stato di equilibrio finale, possiamo senz'altro assumere che la temperatura sia quella dello zero assoluto (ridiscuteremo più avanti questo punto). Come sia esattamente costituita la materia dipende però dalla densità (o dalla pressione). Ad es. a pressione molto bassa il nucleo di energia minima (per nucleone) è il $^{56}\mathrm{Fe}$, per cui la materia consisterà di ferro metallico: nuclei di $^{56}\mathrm{Fe}$ circondati dal numero di elettroni (26 per nucleo) occorrenti per la neutralità elettrica. L'equazione di stato è quella del ferro: un solido la cui comprimibilità è determinata dalle normali forze interatomiche.

Se facciamo crescere la pressione, a un certo punto la situazione cambia: mentre all'inizio la maggior parte degli elettroni erano legati agli atomi, con l'eccezione degli elettroni di conduzione del metallo, quando la densità aumenta un sempre maggior numero di elettroni occupa le bande di conduzione, finché si arriva praticamente a un gas di elettroni liberi. A questo punto la pressione è quella del *gas di Fermi completamente degenere* formato da tutti gli elettroni. Fortunatamente per noi un tale modello funziona proprio nel campo di densità e pressioni tipiche delle stelle, e perciò ad esso dedicheremo maggiore attenzione.

Se la densità cresce ancora, comincia a diventare energeticamente possibile la reazione

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$$

(*neutronizzazione* della materia). Infatti, dato che la massa del neutrone è maggiore di quella del protone, la conservazione dell'energia richiede elettroni di energia totale almeno pari a $m_\mathrm{n} - m_\mathrm{p} \simeq 1.3\,\mathrm{MeV}$, che sono presenti solo se l'energia di Fermi del gas di elettroni è abbastanza grande. I neutrini prodotti sfuggono, e si formano nuclei sempre più ricchi di neutroni, fino al punto che alcuni neutroni (in numero sempre crescente) non riescono più a essere legati nei nuclei. Si ha così una transizione verso una materia costituita esclusivamente di neutroni "liberi" (le virgolette stanno a ricordare che tra i neutroni ci sono pur sempre interazioni). Anche il gas di neutroni è un sistema semplice, se si trascurano le interazioni.

In ogni modo il problema è ormai chiaro: per ognuno degli stadi descritti si deve calcolare la relazione tra densità e pressione, che rappresenta l'equazione di stato di cui siamo in cerca. Noi non affronteremo questo problema, ma daremo solo qualche cenno ai risultati. Per mostrare però almeno le linee generali dei fenomeni che si presentano, e gli ordini di grandezza in gioco, vogliamo esaminare un po' più in dettaglio i due casi semplici:

1: pressione dominata dal gas di elettroni

2: gas di soli neutroni non interagenti.

Il gas di Fermi degenere

Studiato nel caso limite di temperatura zero, il problema è piuttosto semplice: il sistema di N particelle assumerà lo stato di energia minima, e se non ci sono interazioni tra le particelle questo implica che saranno occupati tutti i livelli più bassi per ciascuna particella, con la sola restrizione imposta dal principio di Pauli. Al nostro scopo è sufficiente calcolare l'energia e la pressione totale del sistema, al modo seguente.

Supponiamo assegnato il volume totale V del gas (ad es. un recipiente di forma cubica). È allora facile verificare che gli stati stazionari per la singola particella sono rappresentati bene, quanto alla loro distribuzione per grandi numeri quantici, dalla condizione: *esiste uno stato per ogni cella di volume* h^3 *dello spazio delle fasi.* Se consideriamo gli stati nei quali il modulo dell'impulso è compreso fra P e $P + dP$, avremo per il loro numero:

$$4\pi V\, P^2 dP/h^3$$

e se teniamo conto della degenerazione di spin (2 per particelle di spin 1/2) questo numero si raddoppia.

Dunque gli stati fino a un impulso massimo P_F sono $\frac{8}{3}\pi V\, P_\mathrm{F}^3/h^3$ e ne segue per la densità numerica delle particelle ($n = N/V$):

$$n = \frac{8\pi P_\mathrm{F}^3}{3h^3} = \frac{P_\mathrm{F}^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

e viceversa

$$P_\mathrm{F} = \left(3\pi^2 n\hbar^3\right)^{1/3}.$$

L'energia (cinetica) si calcola facilmente se le particelle sono non relativistiche:

$$E = \int_0^{P_\mathrm{F}} \frac{P^2}{2m}\,\frac{V\,P^2\,dP}{\pi^2\,\hbar^3} = \frac{3}{10}\left(3\pi^2\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m}\,V\,n^{5/3} = \frac{3}{10}\left(3\pi^2\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m}\,N^{5/3}\,V^{-2/3}$$

da cui per la pressione

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_N = \tfrac{1}{5}\left(3\pi^2\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m}\,n^{5/3}. \tag{20–1}$$

È importante esaminare la condizione di validità del calcolo non relativistico. Occorrerà evidentemente $P_\mathrm{F} \ll mc$, da cui

$$n \ll \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3.$$

Per un gas di elettroni $n \ll 5.8 \cdot 10^{29}\,\mathrm{cm}^{-3}$. Supponendo una media di un elettrone ogni due nucleoni, si trova una densità di massa di $2 \cdot 10^6\,\mathrm{g/cm}^3$. Per un gas di neutroni si trova invece $n \ll 3.6 \cdot 10^{39}\,\mathrm{cm}^{-3}$, pari a una densità di massa $5.8 \cdot 10^{15}\,\mathrm{g/cm}^3$.

Il calcolo per un gas relativistico fornisce un'espressione poco maneggevole, salvo al limite ultrarelativistico ($P_\mathrm{F} \gg mc$). Possiamo allora trascurare la massa di riposo e scrivere

$$E = \int_0^{P_\mathrm{F}} cP\,\frac{V\,P^2\,dP}{\pi^2\,\hbar^3} = \tfrac{3}{4}\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar c\,V\,n^{4/3} = \tfrac{3}{4}\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar c\,N^{4/3}\,V^{-1/3}$$

$$p = \tfrac{1}{4}\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar c\,n^{4/3}. \tag{20–2}$$

Come si vede, passando dal limite non relativistico a quello relativistico estremo il gas diventa più comprimibile.

Le equazioni di stato

Possiamo ora scrivere le equazioni di stato per i due casi particolari annunciati. Nel caso 1 (pressione dominata dal gas di elettroni) la pressione avrà le forme (20–1) oppure (20–2); quanto alla densità ϱ, essa è determinata dai nucleoni presenti, che hanno energia cinetica trascurabile, e può quindi essere scritta

$$\varrho = \mu\,n_\mathrm{e} m_\mathrm{p}$$

dove si è indicato con μ il numero di nucleoni per elettrone e con m_p la massa del protone (trascuriamo la differenza di massa tra protone e neutrone e i difetti di massa dei nuclei). Riassumendo:

$$p_\mathrm{nr} = \tfrac{1}{5}\left(3\pi^2\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m_\mathrm{e}}\left(\frac{\varrho}{\mu\,m_\mathrm{p}}\right)^{5/3} \tag{20–3}$$

$$p_\mathrm{ur} = \tfrac{1}{4}\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar c\left(\frac{\varrho}{\mu\,m_\mathrm{p}}\right)^{4/3}. \tag{20–4}$$

Abbiamo già visto sopra che per $\mu \simeq 2$ la (20–3) è valida se $\varrho \ll 10^6\,\mathrm{g/cm}^3$, e la (20–4) se $\varrho \gg 10^6\,\mathrm{g/cm}^3$.

Siamo ora in grado di verificare se nelle condizioni tipiche delle stelle sia lecito trattare il gas come completamente degenere. Ciò accade quando l'energia di agitazione termica NkT è molto minore dell'energia già calcolata. Per il caso non relativistico:

$$kT \ll \tfrac{3}{10} \bigl(3\pi^2\bigr)^{2/3} \, \frac{\hbar^2}{m_\mathrm{e}} \left(\frac{\varrho}{\mu \, m_\mathrm{p}} \right)^{2/3}.$$

Inserendo i valori numerici si trova ad es. che per $T = 10^7\,\mathrm{K}$ (ordine di grandezza della temperatura al centro del Sole) dev'essere $\varrho \gg 10^3\,\mathrm{g/cm^3}$. Come vedremo, le densità centrali delle nane bianche sono largamente al disopra di questo limite.

Se si ripete il calcolo nell'ipotesi di gas ultrarelativistico, si trova una condizione ancor più largamente soddisfatta. Concludendo, è perfettamente lecito supporre il gas di elettroni completamente degenere.

Se passiamo ora al gas di neutroni, nel caso non relativistico la densità di energia è tutta dovuta alla massa di riposo, per cui $\varrho = n_\mathrm{n} m_\mathrm{n}$. Allora dalla (20–1)

$$p_\mathrm{n} = \tfrac{1}{5} \bigl(3\pi^2\bigr)^{2/3} \, \frac{\hbar^2}{m_\mathrm{n}^{8/3}} \, \varrho^{5/3}. \tag{20–5}$$

Vedremo in seguito che non occorre considerare il caso relativistico.

Le nane bianche non relativistiche

A questo punto è possibile cominciare a farsi un quadro dei possibili stati di equilibrio di una stella fredda e senza momento angolare, in funzione della pressione (o della densità) centrale.

Se la densità non è troppo alta abbiamo un gas di elettroni degenere e non relativistico: studiamo dunque questo caso, che corrisponde alle *nane bianche* fino a una certa massa. Come vedremo a posteriori, nel calcolo dell'equilibrio gli effetti di RG hanno poca importanza: quindi l'equazione di Oppenheimer–Volkov (19–14) può essere approssimata con quella newtoniana:

$$\frac{dp}{dr} = -G \, \frac{m\varrho}{r^2}. \tag{20–6}$$

(abbiamo reintrodotta la costante di gravitazione, per tornare alle unità usuali). Accanto a questa occorrerà la (19–12):

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varrho. \tag{20–7}$$

Abbiamo poi l'equazione di stato (20–3), che abbrevieremo per ora con

$$p = \alpha \, \varrho^{5/3}.$$

Sostituendo questa nella (20–6) si trova:

$$\frac{d}{dr}\varrho^{2/3} = -\frac{2G}{5\,\alpha}\,\frac{m}{r^2} \tag{20–8}$$

che va integrata insieme con la (20–7), a partire dalle condizioni iniziali $m(0) = 0$, $\varrho(0) = \varrho_{\rm c}$ (densità centrale assunta come parametro libero).

Non è possibile un'integrazione elementare, per cui occorre affrontare il calcolo per via numerica. È però utile osservare subito che non c'è bisogno di risolvere le equazioni per tutte le diverse condizioni iniziali, poiché esiste un'*invarianza di scala*. Se infatti eseguiamo le trasformazioni

$$r \mapsto \lambda r, \quad \varrho \mapsto \varrho/\lambda^6, \quad m \mapsto m/\lambda^3 \tag{20–9}$$

le (20–7), (20–8) restano invariate: ne segue che una volta risolte le equazioni con una data condizione iniziale, si passa a tutte le altre mediante le (20–9). Poiché le (20–9) lasciano invariato il prodotto $m\,r^3$, dobbiamo aspettarci una "famiglia" di stelle con MR^3 = cost. Diamo senz'altro il risultato del calcolo per R e M:

$$\begin{aligned} R &= 3.65\left(\frac{5\,\alpha}{8\pi G}\right)^{1/2}\varrho_{\rm c}^{-1/6} \\ M &= 1.36\left(\frac{5\,\alpha}{2G}\right)^{3/2}\left(\frac{\varrho_{\rm c}}{4\pi}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{20–10}$$

Dalle (20–10) eliminando $\varrho_{\rm c}$ si ricava

$$\begin{aligned} MR^3 &= 33.1\,\pi\left(\frac{5\,\alpha}{4\pi G}\right)^3 = 33.1\left(\tfrac{3}{8}\pi\right)^2\,\frac{\hbar^6}{G^3\mu^5 m_{\rm e}^3 m_{\rm p}^5} \\ &= 45.9\left(\frac{\hbar}{m_{\rm e}c}\right)^3\left(\frac{M_{\rm P}}{\mu\,m_{\rm p}}\right)^5 M_{\rm P} \end{aligned} \tag{20–11}$$

dove $M_{\rm P} = \sqrt{\hbar c/G}$ è la massa di Planck, definita al Cap. 1. È notevole che con parametri microscopici (ricordiamo che $\hbar/m_{\rm e}c$, detta *lunghezza d'onda Compton ridotta dell'elettrone*, vale $3.8 \cdot 10^{-11}$ cm, e che anche $M_{\rm P}$ vale solo $2.2 \cdot 10^{-5}$ g) si riesce a costruire una grandezza di dimensioni "astronomiche": infatti se poniamo nella (20–11) $M = M_\odot$ troviamo $R = 7.0 \cdot 10^8\,\text{cm} = 7000\,\text{km}$, cioè all'incirca il raggio della Terra. Ciò accade perché nella (20–11) compare il rapporto $M_{\rm P}/\mu m_{\rm p}$, che è un numero puro grande ($\sim 10^{19}$) elevato alla quinta potenza. Per inciso, sarebbe del tutto impossibile arrivare al risultato con sole considerazioni dimensionali.

Il valore appena calcolato per R può servirci per verificare le due ipotesi fatte:

a) che si possano trascurare gli effetti di RG

b) che si possa trattare il gas di elettroni come non relativistico.

Quanto ad a), basterà osservare che il raggio di Schwarzschild per una massa come quella del Sole è 3 km, molto minore di R: dunque gli effetti di RG sono realmente trascurabili. Si dovrebbe anche verificare che sono lecite le altre approssimazioni che dall'equazione di Oppenheimer–Volkov portano alla (20–6); si trova sempre la stessa condizione:

$$M \ll \frac{3M_{\mathrm{P}}^3}{m_{\mathrm{e}}^{3/4}(\mu m_{\mathrm{p}})^{5/4}}.$$

A conti fatti, il secondo membro è dell'ordine di $10^3\, M_\odot$.

Quanto al modello non relativistico per gli elettroni, con $M = M_\odot$ risulta $\varrho_{\mathrm{c}} = 1.3 \cdot 10^6\,\mathrm{g/cm^3}$, che è proprio a metà strada fra i due casi estremi: non relativistico e ultrarelativistico. Se ne conclude che il calcolo non relativistico sarà lecito solo per masse sensibilmente minori di quella solare, in quanto $\varrho_{\mathrm{c}} \propto M^2$, come si vede dalla seconda delle (20–10). Poiché esistono nane bianche di massa uguale o maggiore del Sole, è necessario esplorare anche il caso ultrarelativistico.

Le nane bianche ultrarelativistiche

Il modello ultrarelativistico si tratta in maniera perfettamente analoga all'altro: prendiamo l'equazione di stato (20–4), scritta

$$p = \beta\, \varrho^{4/3},$$

e sostituiamola nella (20–6). Troviamo

$$\frac{d}{dr}\varrho^{1/3} = -\frac{G}{4\beta}\,\frac{m}{r^2}. \tag{20–12}$$

che va risolta insieme con la (20–7). Abbiamo ancora un'invarianza di scala:

$$r \mapsto \lambda r, \quad \varrho \mapsto \varrho/\lambda^3, \quad m \mapsto m \tag{20–13}$$

che lascia invariante m. Dobbiamo quindi aspettarci stelle *tutte di un'unica massa.*

L'integrazione numerica fornisce ora

$$\begin{aligned} R &= 6.90 \left(\frac{\beta}{\pi G}\right)^{1/2} \varrho_{\mathrm{c}}^{-1/3} \\ M &= \frac{8.08}{\pi^2}\left(\frac{6\,\beta}{G}\right)^{3/2}. \end{aligned} \tag{20–13}$$

Sostituendo l'espressione di β si ha

$$\begin{aligned} M = M_{\mathrm{Ch}} &= 2.02\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2}(\mu\, m_{\mathrm{p}})^{-2} \\ &= 3.10\left(\frac{M_{\mathrm{P}}}{\mu\, m_{\mathrm{p}}}\right)^{2} M_{\mathrm{P}} = 1.44\, M_{\odot} \quad (\mu = 2). \end{aligned} \tag{20–14}$$

Anche per la (20–14) occorre ripetere quanto già detto per la (20–11): è notevole come si ottenga una massa dell'ordine di quella del Sole, partendo da soli dati microscopici, grazie alla presenza di un enorme numero puro.

Dai due casi limite che abbiamo studiati appare già chiaro che *esiste una configurazione di equilibrio di nana bianca per tutte le masse minori di* M_{Ch}*, e solo per quelle*: quindi M_{Ch} ha il significato di *massa limite*, e si chiama infatti *limite di Chandrasekhar*. Ricordiamo però che abbiamo trascurato gli effetti di RG: vogliamo ora vedere come questi modificano la situazione.