Elaborazione dei dati sperimentali: la cosiddetta “teoria degli errori”*

Elio Fabri

Dipartimento di Fisica – Università di Pisa

——— o ———

Premessa

L’argomento indicato nel titolo è ovviamente fondamentale nell’insegnamento della fisica a qualsiasi livello, nella misura in cui la fisica è scienza sperimentale. Ciò è riconosciuto, bene o male, da tutti i programmi, dai libri, e da qualsiasi insegnante. Tuttavia non si può dire che non sussistano in materia questioni da discutere e da approfondire: a mio giudizio anzi ci sono dei veri e propri “miti” da sfatare, che nella pratica didattica si traducono in eccessi nella trattazione di aspetti inessenziali e viceversa nell’insufficiente spazio dedicato a questioni più centrali per il lavoro sperimentale e per la stessa comprensione della fisica. A questo si riferisce la seconda parte del titolo.

Da un altro punto di vista, possiamo dire che nell’argomento in questione vengono a intrecciarsi tre diversi ordini di problemi, troppo spesso confusi, e che invece è bene tenere distinti, perché hanno significato, ruolo e importanza didattica ben diversi. Mi riferisco ai seguenti:

– Approssimazioni numeriche e cifre significative (come si fanno i calcoli?)

– Elaborazione dei dati (come si tiene conto degli errori?)

– Analisi delle cause di errore (a che cosa sono dovuti gli errori?)

In ciò che segue darò solo qualche cenno sul primo, che a rigore non è un problema di fisica; dirò qualcosa di più sul secondo e sul terzo.

1. Approssimazioni numeriche e cifre significative

Questo aspetto è spesso confuso e mescolato con la “propagazione degli errori,” che appartiene al punto 2. In realtà il problema è soltanto matematico (anche se per noi la motivazione è fisica) e si può enunciare così: quali metodi e procedure occorre adottare nei calcoli, per non perdere o alterare informazioni importanti, e nello stesso tempo non complicarsi inutilmente la vita?

Così formulato, si vede che il problema ha un aspetto “economico,” che ha oggi perso gran parte della sua importanza, grazie ai calcolatori.

* Novembre 1994. Pubblicato in *La Fisica nella Scuola* **28** (1995), 119.

L'altra faccia del problema è che un calcolo numerico *è sempre approssimato.* Esiste un mito dei numeri "esatti," ma in realtà non solo numeri come π e $\sqrt{2}$, ma anche come $5/17$, in genere vengono approssimati.

L'aspetto essenziale è però l'altro: come non perdere o alterare informazioni? Questo può accadere in diversi modi:

a) perché si usano metodi approssimati per sviluppare il calcolo

b) perché nelle operazioni hanno luogo delle approssimazioni

c) perché non si registrano o non si trascrivono un numero sufficiente di cifre (la questione delle "cifre significative").

Discutere questi aspetti significa affrontare tutto il settore dell'analisi numerica, che non è il mio tema, e d'altra parte ha poco interesse pratico per la didattica secondaria. Mi limito perciò a pochi cenni illustrativi e a qualche consiglio pratico.

Il punto *a*) si riferisce all'uso di algoritmi approssimati: un esempio ben noto a tutti è quello dell'integrazione di equazioni differenziali con metodi discreti (Eulero, o altri più sofisticati). L'introduzione dei PC nella didattica della fisica ha reso facile l'impiego di queste tecniche; le cautele che esse richiedono vanno al di là di ciò che mi sono proposto di trattare. Mi limito quindi a raccomandare di non prendere mai per oro colato i risultati di un calcolo numerico, *a maggior ragione se vengono fuori da un calcolatore*!

Il punto *b*) è concettualmente distinto da *a*): si tratta del fatto che quasi tutte le operazioni, anche quelle più elementari, quando sono eseguite con un calcolatore (ma anche con un regolo, o con i logaritmi) sono approssimate. In teoria si dovrebbero usare perciò cautele analoghe al caso *a*); ma per fortuna tutti i calcolatori odierni, anche tascabili, lavorano con approssimazioni molto superiori a quelle che occorrono in relazione ai dati sperimentali; perciò il rischio di perdere o alterare informazioni si restringe a qualche caso eccezionale (es. quando si fa la differenza di due numeri quasi uguali) e non occorre preoccuparsene in generale.

Per maggior chiarezza, vediamo un esempio concreto: l'integrazione del moto di un oscillatore armonico. Per mettere nella migliore evidenza i fenomeni numerici, conviene ridurre il problema al suo "osso" matematico, eliminando tutte le costanti inessenziali (cosa che in questo caso, grazie anche alla linearità dell'equazione, è possibile con opportuna scelta delle unità di misura). Mi riferirò quindi all'equazione differenziale

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{1}$$

che vogliamo integrare con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ (la soluzione è ovviamente $x = \sin t$). Integrando la (1) col metodo di Eulero nell'intervallo da 0 a 2π, con un numero n di passi via via crescente, ho ottenuto per $x(2\pi)$:

n	$x(2\pi)$
2^{10}	$-8.04 \cdot 10^{-5}$
2^{11}	$-1.99 \cdot 10^{-5}$
2^{12}	$-4.95 \cdot 10^{-6}$
2^{13}	$-1.24 \cdot 10^{-6}$
2^{14}	$-3.15 \cdot 10^{-7}$
2^{15}	$-8.97 \cdot 10^{-8}$
2^{16}	$-4.46 \cdot 10^{-8}$
2^{17}	$-5.53 \cdot 10^{-8}$
2^{18}	$-1.03 \cdot 10^{-7}$
2^{19}	$-2.03 \cdot 10^{-7}$
2^{20}	$-4.05 \cdot 10^{-7}$
2^{21}	$-8.10 \cdot 10^{-7}$
2^{22}	$-1.62 \cdot 10^{-6}$

Si vede che l'errore dapprima decresce come $1/n^2$, passa per un minimo fra 2^{16} e 2^{17}, e poi cresce di nuovo, come n. La diminuzione iniziale indica che l'errore prevalente è del tipo a), mentre il successivo aumento mostra l'effetto di un errore del tipo b), che è proporzionale al numero totale di operazioni. Situazioni del genere si presentano in qualsiasi calcolo numerico, e a volte possono tradursi in risultati grossolanamente errati: è per questo che ho raccomandato di non riporre una fiducia cieca nei calcoli numerici. Può capitare anche di peggio, quando il metodo di calcolo riesce *instabile*; ma su questo punto non voglio intrattenermi oltre.

Le difficoltà più comuni possono sorgere invece dall'effetto c), ossia nell'introduzione e nella trascrizione dei dati, se per pigrizia si usano troppo poche cifre, o se invece se ne scrivono tante, aumentando il rischio di fare errori. Per superare queste difficoltà in un modo assai pratico (addirittura *terra-terra*) suggerisco due semplici regole:

1) Evitare di trascrivere inutilmente risultati intermedi, che possono essere lasciati "dentro il calcolatore" (tutti i calcolatori, anche i tascabili più economici, hanno "memoria"!) È bene educare i ragazzi a una tale pratica, perché la tendenza è invece quella di usare il calcolatore per operazioni singole; sprecando così tempo e rischiando errori.
2) Quando sia necessario introdurre o trascrivere dati, usare un numero piccolo (ma adeguato) di cifre. Nei casi che possono interessare in pratica, 5 cifre sono un buon compromesso: abbastanza poche per costare poco in tempo ed errori, e più di quante ne occorrono per non perdere informazioni significative.

Come si vede, mi discosto qui da una prassi quasi universale, a mio giudizio di dubbio valore nella didattica: quella di scrivere solo le cifre "fisicamente significative." Questa regola, che di solito finisce per assumere forma catechistica ed essere usata senza la minima comprensione del suo significato, non ha oggi utilità pratica. Non mi dilungo, perché l'argomento è stato già discusso in altra occasione [1].

Mi affretto a precisare che la regola data sopra si riferisce *al corso del calcolo*, e non riguarda né i dati iniziali, presi dalle misure, né la presentazione del risultato finale. Sappiamo che è opportuno distinguere fra 1.5, 1.50, 1.500: quando si prende una misura — ad es. una lunghezza in metri — e si decide di apprezzare il centimetro, si scriverà ovviamente 1.49 e 1.51; ma per la stessa ragione bisogna anche scrivere 1.50. Quanto al risultato finale del calcolo, sarebbe sciocco scriverlo con 5 cifre se l'incertezza (v. dopo) è sulla terza cifra.

Eppure anche qui c'è qualcosa da aggiungere, perché sono diffuse altre regole "catechistiche," che vanno contro il buon senso. È cosa molto diversa scrivere 1.49 ± 0.08 oppure 1.49 ± 0.01. Se per lasciare solo la prima cifra affetta dall'errore abbiamo arrotondato il risultato di un calcolo che aveva dato (poniamo) 1.494, nel primo caso abbiamo introdotto un errore (di arrotondamento) che è 1/20 dell'errore sperimentale, e quindi è del tutto accettabile; nel secondo caso però l'arrotondamento ammonta al 40% dell'errore sperimentale, ed è un po' troppo pesante. Tutto dipende dal fatto che lavorando in base 10 dire "una cifra" può significare tanto 1 quanto 9, che pesano in modo ben diverso.

Per questa ragione a mio giudizio è meglio abbondare, ossia scrivere *due cifre* di quelle affette dall'errore di misura, e non una sola. Nell'esempio visto avremo quindi 1.494 ± 0.078 oppure 1.494 ± 0.012, e l'arrotondamento non ha mai importanza.

2. Elaborazione dei dati

Siamo ora entrati nel tradizionale dominio della "teoria degli errori": gaussiane, minimi quadrati, propagazione degli errori, ecc.; argomenti ai quali si dedica secondo me troppo tempo, senza vera necessità e con scarsi risultati.

Per impostare correttamente il problema è utile riformulare la domanda "come si tiene conto degli errori?" In realtà si tratta di due questioni distinte:

1) Abbiamo fatto delle misure: qual è il valore più attendibile del risultato? quanto possiamo crederci?
2) Se lo usiamo per ricavarne delle conseguenze (misure indirette, verifiche di leggi), come possiamo valutare l'attendibilità delle conclusioni?

A mio giudizio, il massimo obbiettivo che ci si può porre nell'insegnamento secondario (e sarebbe già un gran bel risultato) è che siano chiari i due problemi, e qualche possibile soluzione in casi semplici, con mezzi semplici: niente di più.

Quanto alla teoria degli errori in senso stretto, sarebbe bene ricordare che essa nasce con Gauss, agli inizi dell'800, per un problema preciso di astronomia:

la determinazione degli elementi orbitali degli asteroidi a partire dalle osservazioni. Per oltre un secolo ha avuto scarse applicazioni alla fisica. Oso perciò asserire, con un po' di provocazione, che si può fare della buona fisica anche senza teoria degli errori. (A scanso di equivoci chiarisco che gli errori statistici sono un'altra cosa: è necessario tenerne conto quando nella misura intervengono fenomeni casuali, come negli esperimenti di fisica delle particelle.)

Vediamo ora i punti essenziali su alcuni esempi. Abbiamo eseguito una serie di misure, ottenendo diversi risultati: qual è il valore più attendibile della grandezza che si voleva misurare? (Potrebbe trattarsi ad es. del periodo di un pendolo.) Occorre notare in primo luogo che l'esigenza di dare un valore "più attendibile" è essenzialmente un problema di comunicazione: se voglio riassumere tutte le misure in un solo numero, quale debbo scegliere? Infatti la maniera più corretta di comunicare i risultati del mio lavoro *senza perdere informazioni* sarebbe di trasmettere tutti i numeri che ho trovato. Si potrebbe osservare che in realtà riassumere i risultati in un solo numero risponde anche a un'esigenza di "sintesi," che ha a che fare con l'esistenza di un teoria con cui la misura va confrontata; ma dobbiamo limitare la discussione di questo aspetto, per non divagare troppo.

Il criterio della media è ragionevole in molti casi, ma va usato *cum grano salis*, e non insegnato come un dogma. Infatti ci sono vari casi in cui non funziona:

- se ci sono errori sistematici, che la media non corregge
- se ci sono "derive" durante la misura (ad es. variazioni di temperatura, oppure, nel caso del pendolo, l'effetto dell'ampiezza)
- se le misure non sono equivalenti (ad es. perché eseguite da persone diverse).

Sempre nello spirito della comunicazione, il secondo passo consiste nel cercare di dare un'idea della dispersione dei risultati. La linea tradizionale, come tutti sanno, è di calcolare lo scarto quadratico medio (s.q.m.). Qui ci sono, secondo me, diverse obiezioni:

- lo s.q.m. non ha una giustificazione semplice
- ha veramente senso solo quando si possano applicare gli sviluppi successivi, il che accade di rado nelle misure tipiche del laboratorio di scuola secondaria
- favorisce un atteggiamento dogmatico: "si fa così" e basta.

In effetti l'atteggiamento giusto dipende dalla situazione, e non è facile dare una regola generale; ma nello spirito di rendere le cose quanto più semplici possibile, sarei favorevole a parlare solo di scarto massimo. Comunque il punto essenziale è capire perché si presenta la dispersione delle misure, e di questo parleremo al punto 4.

A maggior ragione non mi sembra il caso di andare oltre, discutendo gaussiane ecc.; tanto più che ben raramente siamo nelle condizioni in cui la distribuzione degli errori è davvero normale. Al massimo, farei vedere una volta un istogramma, solo per dare un'idea di come si può presentare graficamente la distribuzione di una serie di misure. E con questo termina la risposta alla domanda 1.

Passiamo ora alla propagazione degli errori. Di nuovo, è bene dare importanza solo al concetto di base, senza insistere su tutte le regole per gli errori assoluti e relativi, nelle varie specie di operazioni. Naturalmente la distinzione fra errore assoluto e relativo è importante, ma solo per far capire perché a seconda della situazione è più significativo l'uno oppure l'altro.

Anche qui imperano dei dogmi, che portano ad assurdità in certi casi, e più in generale mascherano il significato fisico sottostante. Due esempi di situazioni "critiche" sono quelle concernenti angoli e temperature.

Nella misura di un angolo, conta l'errore assoluto o quello relativo? La risposta non è univoca, essenzialmente perché l'angolo verrà usato molto probabilmente in una funzione trigonometrica, che non è né lineare né una potenza (i soli due casi in cui è semplice usare risp. l'errore assoluto e quello relativo). Con la pratica s'impara che con angoli piccoli spesso conta l'errore relativo: questo succede ad es. nelle misure astronomiche.

In molti altri casi è invece l'errore assoluto che dà la migliore stima dell'effetto sul risultato finale: misurare un angolo di 20° con l'errore di 1° ha più o meno lo stesso effetto che se si misura un angolo di 60°. Ma non è sempre così: se per esempio l'angolo è l'ampiezza di oscillazione di un pendolo, e lo usiamo per calcolare l'energia potenziale, scopriamo che è più utile pensare all'errore relativo. Questo accade perché $1 - \cos\alpha = 2\,\sin^2(\alpha/2) \simeq \frac{1}{2}\,\alpha^2$.

Quanto alle temperature, se quella che serve è una temperatura assoluta l'errore importante è quello relativo (perché T appare sempre a numeratore o a denominatore di un'espressione monomia); ma se stiamo ad es. misurando un calore specifico la grandezza che conta è una *variazione* di temperatura, e solo l'errore relativo su Δt determina la bontà della misura.

Mi rendo conto che ho detto cose ben note a chi ha pratica di misure: ma il mio scopo era di mettere in evidenza come esistano molte situazioni che non si possono incasellare in regolette da imparare a memoria. Se l'obbiettivo è quello d'insegnare come comportarsi in una situazione reale di laboratorio, e non quello di dare dei precetti validi magari in qualche caso, ma inutilizzabili in altri, si capisce perché le regolette che si trovano su tanti libri fanno più male che bene.

Per concludere su questo punto, sarebbe bene tener presente che tutte le regole di "propagazione degli errori" possono essere sostituite con i calcoli fatti sugli estremi dell'intervallo (naturalmente ricordando il diverso comportamento delle funzioni crescenti e di quelle decrescenti ...).

3. Il "best fit"

Arriviamo infine al problema del *best fit*, dove troviamo un altro idolo: il metodo dei minimi quadrati. A mio parere è del tutto improponibile una spiegazione ragionevole del metodo, e perciò, anche quando è lecito applicarlo (e questo non accade sempre) si finisce per dare delle ricette da imparare a memoria e dimenticare ben presto. Purtroppo qui la disponibilità dei PC, e del software tipo "fogli elettronici," incoraggia a un uso eccessivo e acritico: è questo uno dei motivi per cui, contro l'opinione prevalente di molti insegnanti, non riesco ad apprezzare l'uso dei fogli elettronici.

Come sempre, occorre prima di tutto chiarire il problema che si vuole risolvere. In linea di principio ci sono due situazioni ben diverse: il *fit empirico* e il *confronto con una teoria*. Vediamole separatamente.

Nel primo caso, abbiamo una serie di misure di due variabili, x e y, e supponiamo che la seconda sia funzione della prima. Vogliamo determinare una forma analitica di questa funzione (ad es. un polinomio) che rappresenti il meglio possibile i dati sperimentali.

Osserviamo in primo luogo che abbiamo già fatto un'ipotesi teorica: che y sia funzione soltanto di x, anche se non conosciamo la forma della funzione. Un esempio potrebbe essere la corrente che attraversa un diodo in funzione della d.d.p. applicata (a temperatura costante). Supponiamo inoltre che nella misura di x e/o di y intervengano errori accidentali, per cui i punti (x, y) ottenuti dalla misura non stanno esattamente sulla curva che rappresenta la funzione cercata.

Anche in questo caso, di ricerca di una funzione empirica, occorre qualche criterio metodologico che ci faccia da guida; altrimenti il problema è del tutto indefinito. Si pensi ad es. che per n punti del piano (x, y) passa sempre il grafico di uno e un solo polinomio di grado $n - 1$, e infiniti di grado superiore. Il criterio base sarà quello della semplicità: cercare la funzione più semplice (ad es. il polinomio di grado più basso possibile). Ma in generale se il grado è minore di $n-1$ il *fit* non può essere esatto, e occorre un compromesso, giustificato dal fatto che sappiamo esistere gli errori accidentali.

> "Se le osservazioni astronomiche, e le altre grandezze su cui si basa il calcolo delle orbite, fossero assolutamente esatte, anche gli elementi dedotti da tre osservazioni sarebbero rigorosamente precisi (fintantoché si possa ammettere che il moto ha luogo esattamente secondo le leggi di Keplero); e quindi se si usassero altre osservazioni essi potrebbero essere confermati, ma non corretti. Ma poiché tutte le nostre osservazioni e misure non sono niente di più che approssimazioni al vero, lo stesso accadrà di tutte le deduzioni che su quelle si appoggiano, e lo scopo ultimo di tutti i calcoli concernenti fenomeni concreti dovrà essere quello di approssimarsi quanto meglio si può alla verità. Ciò non può farsi in altro modo se non mediante un'opportuna combinazione di un numero di osservazioni maggiore di quello strettamente richiesto per la determinazione delle grandezze incognite." [2]

Il metodo dei minimi quadrati è solo una tecnica per scegliere il compromesso: rendere minima la somma dei quadrati degli scarti in y. Tale criterio è ben giustificato sotto certe ipotesi, su cui non mi soffermo perché le suppongo ben note; voglio però rilevare che *raramente queste ipotesi sono verificate* nelle condizioni degli esperimenti con cui abbiamo a che fare.

Ma esiste un'altra difficoltà: il metodo dei minimi quadrati *dà sempre una risposta*, anche quando il *fit* tentato è del tutto irragionevole. Se non si sa qualcosa dell'entità degli errori accidentali, e senza un'ispezione dell'andamento dei residui, non è possibile decidere se il *fit* è o no accettabile. Parlando il linguaggio della statistica, per il caso particolare di un *fit* lineare: una retta di regressione si trova sempre, e non basta il coefficiente di correlazione per capire se il *fit* è buono.

Mi soffermo ancora un po' sulla retta di regressione (termine degli statistici per indicare esattamente la stessa cosa di un fit lineare). La ragione è che con i fogli elettronici è fin troppo facile farne uso, senza bisogno di averne capito il significato. Poiché abbiamo due variabili, x e y, possiamo trovare *due* rette di regressione: il calcolo mostra che queste non coincidono, a meno che i punti sperimentali non siano esattamente allineati; si vede anzi che la pendenza della retta di regressione di y su x è sempre minore dell'altra.

Che le cose stiano così, è solo un teorema di matematica; ma che cosa c'è sotto? Il fatto è che le due regressioni sono corrette in due ipotesi ben distinte: la prima (quella di y su x) se le misure di x sono esatte, e solo quelle di y sono affette da errori accidentali; la seconda nel caso opposto. Nella pratica di laboratorio potrà capitare il primo caso, oppure il secondo (che del resto si riduce al primo scambiando le variabili), o anche quello intermedio, in cui ci sono errori non trascurabili tanto su x quanto su y. Nell'ultimo caso la tecnica da usare non potrà essere quella della semplice regressione.

Ecco perché a mio giudizio un metodo così automatico, ma così difficile da valutare, è di dubbio valore didattico.

Per ora siamo rimasti alla ricerca di una funzione empirica: tuttavia un tale approccio ha poco significato fisico, come si vede con un esempio concreto. Supponiamo di aver misurato il periodo di un oscillatore armonico in funzione della massa, e di non saper niente sulla dipendenza che dobbiamo attenderci. Il criterio di semplicità ci porterà a cercare in primo luogo una funzione lineare; e se i punti sono pochi e gli errori abbastanza grandi, può darsi che il *fit* riesca. Avremo così dimostrato che il periodo è funzione lineare della massa? Se invece il *fit* lineare non va bene, potrà andar bene quello quadratico: allora il periodo è una funzione quadratica della massa? Per questa strada non arriveremo mai a congetturare la legge giusta…

Ecco un secondo esempio: i numeri sono tratti da un esperimento reale, ma per non influenzare il giudizio di chi legge, non dico subito di che esperimento si tratta, in modo che non ci siano aspettative sulla "legge." Le grandezze misurate sono date dalla tabella che segue

x	y
0	58
645	54
1290	50
1935	46
2580	42
3225	39
3870	36

Supporremo inoltre (semplificando un po') che sulla x non ci siano apprezzabili incertezze di lettura né errori accidentali, e sulla y ci sia solo un'incertezza di mezza unità. Si vede a occhio, e un grafico lo conferma, che i punti sono perfettamente allineati, con la sola deviazione dell'ultimo. Disegnando le barre di errore si constata che una relazione lineare tra x e y si adatta benissimo ai dati.

Conclusione: il fenomeno in esame è retto da una legge lineare tra le due variabili. E adesso scopriamo le carte: l'esperimento misurava pressione e volume dell'aria a temperatura costante; la x è la massa (in grammi) che comprime il pistone di una siringa, e la y il volume in cm^3; l'area del pistone è $5.7\,\mathrm{cm}^2$. Forse abbiamo "falsificato" la legge di Boyle? Ovviamente no: tenendo conto che a massa 0 c'è sempre la pressione atmosferica, il rapporto fra le pressioni estreme è soltanto 1.66, e in tale intervallo l'iperbole equilatera che rappresenta la legge di Boyle non si scosta troppo da una retta: solo l'ultimo punto avverte che forse la legge lineare non è giusta.

Ma il punto che voglio mettere in evidenza è un altro: da quei dati sperimentali non avremmo mai potuto estrarre la legge di Boyle, come puro *fit* empirico. S'intende che il discorso cambierebbe se

a) le misure fossero più precise

b) l'intervallo di pressioni fosse maggiore.

Debbo anzi confessare che per meglio illustrare la mia tesi ho barato un po': nella tabella c'erano altre due righe:

4515	34
5160	32

che rivelano assai meglio lo scostamento dall'andamento lineare. Ma questo non altera la validità generale del discorso.

Abbiamo qui visto un esempio particolare di un aspetto epistemologico generale: il solo esame di dati sperimentali, senza il supporto di una teoria, o almeno di un'ipotesi, *non porta a nessuna conoscenza scientifica.* Pur senza fare discorsi involuti e astratti, non si dovrebbero tralasciare le occasioni per discutere questi aspetti della fisica; ma quanto meno, non si dovrebbero indurre gli allievi a conclusioni metodologicamente sbagliate.

Dunque la situazione più interessante è un'altra: abbiamo una teoria, e vogliamo vedere se l'esperimento la conferma o la smentisce; ed eventualmente se ci permette di determinare qualche parametro (per es. nel caso dell'oscillatore, la costante di proporzionalità fra periodo e radice della massa). Da un punto di vista tecnico però questa situazione non differisce dal *fit* empirico, per cui non c'è bisogno d'insistere.

Dopo aver presentato le critiche, occorre una proposta costruttiva: è la seguente. Fermo restando che qui ci si occupa solo di esperimenti e tecniche di elaborazione adatti alla scuola secondaria, a mio giudizio la soluzione migliore è di fare un'analisi grafica: infatti questa non richiede calcoli, permette di visualizzare il significato del *fit*, ed è complessivamente molto più interattiva. Resta comunque da sottolineare ancora che assegnare errori al *fit* è sempre molto difficile.

4. Analisi delle cause di errore

È l'argomento più importante e meno trattato; quello che ha il maggior contenuto fisico e dovrebbe sempre avere la precedenza temporale sulle questioni discusse finora, che non andrebbero affrontate se non quando se ne mostri la necessità in situazioni reali.

Un lavoro che va condotto all'inizio della scuola secondaria (anche se potrebbe cominciare fin dalla scuola elementare) è quello di familiarizzare gli studenti con vari tipi di strumenti di misura, alcuni dei quali già conosciuti e usati, ma senza riflessione scientifica: intendo strumenti da lavoro (metri da sarto, da muratore, metri a nastro, righe millimetrate; cilindri graduati, pipette); strumenti domestici (vari tipi di termometri: da parete a mercurio o metallici, da bagno, clinici, per forno; bilance a molla, a due piatti, stadere; orologi a lancette, digitali ...); strumenti per auto (contagiri, termometri, manometri, indicatori di livello ...).

Uno degli scopi di questa rassegna è di prendere confidenza con i diversi tipi di "display": lancette, scale, digitali... Ci si renderà così conto delle diverse possibilità e difficoltà di lettura, e si arriverà in modo naturale al problema della sensibilità di lettura. Anche in questo caso consiglio di nuovo di usare il buon senso, senza regole meccaniche. Non ha senso affermare apoditticamente che si apprezza sempre la mezza divisione, o qualunque altra frazione: talora si può anche apprezzare 1/10 di divisione; in condizioni sfavorevoli, anche le divisioni intere sono ottimistiche.

Un secondo scopo è quello di familiarizzare gli allievi col concetto di *taratura*. Confrontando tra loro metri, termometri, ecc. si scopre che non sempre "vanno d'accordo": ci sono differenze sistematiche, e nasce il problema di quale sia quello giusto (se ...).

Come successivo passo, bisogna imparare a riconoscere i limiti di uno strumento, che non coincidono con la sensibilità di lettura: un esempio evidente è fornito dal cronometro digitale al centesimo di secondo, presente in molti orologi da polso.

A questo punto si potrà cominciare (sempre scegliendo situazioni reali, presenti in esperimenti concreti!) a distinguere gli errori sistematici da quelli accidentali: si dovrà portare i ragazzi a saperli riconoscere, ma senza enunciare regole cristallizzate. Raccomando in particolare di evitare domande e problemi che chiedano la ripetizione di "formule" già pronte (come purtroppo se ne trovano spesso nei libri di testo).

Veniamo ora alla condotta di un esperimento. Di fronte a misure che non danno i risultati previsti ci sono due diversi atteggiamenti che sorgono facilmente nella situazione scolastica, e che bisogna superare:

1) il ragazzo conclude che l'esperimento era sbagliato *e inutile*
2) la causa è negli errori di misura (tutto va ben, madama la marchesa ...)

Nel caso 1), dopo l'ovvia premessa che l'abilità dell'insegnante in quanto fisico sperimentale sta nel non proporre un esperimento che *non può* condurre a risultati accettabili per qualche difetto di fondo, occorre portare gli allievi a discutere le cause dell'insuccesso iniziale, fino a superarlo.

Nel caso 2) bisogna respingere la tentazione di accontentarsi comunque. Se le cose non tornano c'è una ragione: occorre criticare le misure, trovarne il "punto debole," pensare come le si potrebbe migliorare. Di solito esprimo questo criterio metodologico con una battuta: "un esperimento non è mai finito." Si tratta naturalmente di un'estremizzazione, specie nella situazione scolastica, in cui il tempo è tiranno; ma occorrerebbe *almeno una volta* mostrare in pratica che cosa vuol dire.

Un aspetto non andrebbe mai trascurato: spesso in un esperimento si misurano diverse grandezze, che vengono usate insieme per arrivare al risultato finale: gli esempi sono innumerevoli, a cominciare da quello banale di una misura di velocità (spazio diviso tempo). In queste situazioni, di solito una delle misure è la principale responsabile dell'errore finale: occorre identificarla, perché se si vuole migliorare l'esperimento è su quella che occorre concentrare gli sforzi.

Forse però l'atteggiamento più frequente è un altro: si fanno le misure e si tenta il confronto con la legge prevista. Il confronto non riesce mai proprio bene, ma ci si accontenta con la formula magica: "la legge di ... (riempire con un nome a scelta) è quindi verificata *entro gli errori*." Che c'è di male? Dipende: andrebbe tutto bene se la stima degli errori fosse stata fatta preventivamente, o anche a posteriori, ma in modo serio, senza farsi influenzare dal desiderio di far tornare le cose. Il guaio è che spesso ci si limita a mettersi a posto la coscienza: la legge non torna, ma questo succede perché ci sono gli errori.

Una variante che ho visto usata non di rado consiste nel dare una stima eccessivamente pessimistica degli errori, o anche solo della sensibilità di lettura degli strumenti: per esempio, nel proibire agli studenti di apprezzare frazioni di divisione quando sarebbe possibile farlo. Questo atteggiamento ha un evidente vantaggio: se si sovrastimano gli errori (accidentali o di lettura) è più facile che l'esperimento riesca "entro gli errori," e ci sarà meno rischio di dover fare i conti con gli errori sistematici, che sono il vero problema di ogni esperimento.

Arriviamo così alla questione centrale: come si scoprono le cause di errore? come se ne stima l'entità? Questa è una parte essenziale del lavoro del fisico sperimentale, e lo è anche nella didattica. Come al solito, non esistono regole belle e pronte. Si possono dare solo alcune indicazioni.

a) In molti casi, non si ha a che fare con errori, ma solo con incertezze dovute alla sensibilità di lettura degli strumenti. Ci si accorge di ciò quando ripetendo la misura si trova sempre lo stesso risultato.

b) In altri casi, è la stessa ripetizione delle misure a mostrare l'entità degli errori accidentali.

c) Gli errori sistematici sono molto più difficili da scoprire: un metodo abbastanza sicuro è quello di ripetere la misura usando strade del tutto diverse, ma questo non è sempre possibile. Altrimenti, ci si deve affidare al grado di conoscenza dei fenomeni e degli strumenti...

Ma se non fosse così, perché alcuni fisici sarebbero migliori di altri?

——— ○ ———

[1] E. Fabri, U. Penco: "Gli obbiettivi del problema e i modi per raggiungerli"; *La Fisica nella Scuola* **27** (1994), suppl. al n. 4, pag. 6.

[2] K. F. Gauss: *Theoria Motus Corporum Cœlestium* (1809), terza sezione, n. 172. Trad. del presente autore dall'edizione inglese (Dover 1963).