La candela

Mi sto chiedendo se di questi tempi basti una candela, mentre tira un vento di burrasca. Quando anche il primo comma dell'art. 33 della Costituzione (molto meno ricordato del secondo: dice "l'arte e la scienza sono libere e libero ne è l'insegnamento") rischia di essere messo in discussione, non ci vorrà qualcosa di più resistente, e che si faccia vedere più da lontano?

Ma per questa volta mantengo la promessa, e tratterò argomenti strettamente scientifici. Mi propongo di parlare di moto browniano, di motori molecolari, di contrazioni muscolari… A prima vista questioni piuttosto eterogenee, ma poi vedremo se lo sono davvero.

Credo che nessuno di quelli che mi leggono ignori che cos'è il moto browniano e il problema che esso ha costituito durante tutto l'800: la scoperta di Brown col polline di *Clarkia pulchella* sospeso in acqua; la verifica che lo stesso moto si presentava anche nel polline di piante morte da un secolo ("un'inattesa manifestazione di vitalità, conservata da queste 'molecole' tanto tempo dopo la morte della pianta," scrisse Brown); la prova che non si trattava di un fenomeno vitale, dato che lo si vedeva anche nelle sospensioni di particelle minerali e di nerofumo. Nel 1865 Cantoni e Oehl mostrarono che aveva il carattere di un "moto perpetuo," nel senso che permaneva anche dopo un anno in una sospensione sigillata tra due vetrini.

Ma solo lo sviluppo e l'affermazione della meccanica statistica, negli ultimi decenni dell'800 (affermazione che non avvenne senza contrasti, va ricordato) fornì la base concettuale per spiegare il moto browniano, nel senso che oggi tutti sanno: l'aspetto visibile su corpi microscopici, ma tuttavia osservabili appunto al microscopio, degli urti disordinati da parte delle invisibili molecole del fluido. È anche giusto ricordare, pur se di volata, che proprio la teoria del moto browniano, e il suo vincente confronto con le osservazioni, furono la base per la definitiva affermazione della "ipotesi atomica," che sebbene vecchia di un secolo, agli inizi del '900 contava ancora fieri oppositori.

* * *

Una piccola divagazione: alla fine dello scorso anno scolastico, grazie all'intesa degli insegnanti di Fisica e di Scienze, sono stato invitato a parlare ai ragazzi di una seconda al Liceo Scientifico "U. Dini" di Pisa. Il tema era appunto "la realtà degli atomi." I ragazzi sapevano già le leggi fondamentali delle reazioni chimiche, conoscevano l'ipotesi atomica e il numero di Avogadro, avevano anche letto la prima lezione di Feynman sullo stesso argomento. Decisi perciò d'impostare il discorso come un "giallo scientifico," ispirandomi a quanto fanno, per altri temi, Einstein e Infeld nel libro *L'evoluzione della fisica*.

La linea del discorso era questa: voi avete visto che con l'ipotesi degli atomi si spiegano benissimo le leggi delle proporzioni nelle reazioni chimiche, nonché le leggi dei gas. Ma tutto ciò non ci dice quanto gli atomi sono grandi e numerosi: voi lo sapete, perché conoscete il numero di Avogadro, quindi anche la massa di un atomo d'idrogeno, ecc. Ma se il numero di atomi in una mole fosse mille volte maggiore, o mille volte minore; se quindi la massa di un atomo fosse mille volte minore o maggiore rispettivamente, non cambierebbe niente: le leggi della chimica e quelle dei gas funzionerebbero allo stesso modo. È per questo motivo — tra gli altri — che rispettabilissimi scienziati per tutto l'800 "non credevano" agli atomi. Dicevano: "come si può credere in qualcosa di cui non possiamo precisare numero, dimensioni, massa? Al più possiamo accettarla come una comoda ipotesi di lavoro, che ci spiega altre cose; ma da qui a dire che gli atomi esistono, ce ne corre... "

Ecco perché gli altri — quelli che erano convinti della realtà degli atomi — fecero di tutto per trovare delle prove dirette... E a questo punto spiegavo l'esperienza di Langmuir con la goccia di acido oleico sull'acqua, e soprattutto raccontavo il moto browniano, le misure di Perrin agli inizi del secolo scorso, la teoria di Einstein. Già, perché Einstein è conosciuto universalmente come l'inventore della relatività, mentre ben pochi, fuori dell'ambiente scientifico, sanno che ha dato molti altri contributi alla fisica, tanto che Max Born ha potuto scrivere: "A mio parere egli sarebbe uno dei più grandi fisici teorici di tutti i tempi, anche se non avesse scritto una sola riga sulla relatività." Perciò mi è piaciuto ricordare questo fatto: è anche grazie ad Einstein che si è dovuto credere agli atomi.

È interessante riportare ciò che scrive lo stesso Einstein in proposito, e che ho riscoperto per questa occasione, dato che l'avevo del tutto dimenticato.

> "Non conoscendo le precedenti ricerche di Boltzmann e Gibbs, che avevano già esaurito l'argomento, sviluppai la meccanica statistica e la teoria cinetico-molecolare della termodinamica che si basava su di essa. Il mio scopo precipuo era di trovare fatti che confermassero, per quanto era possibile, l'esistenza di atomi di determinate dimensioni finite. Nel corso di questa ricerca scoprii che, in base alla teoria atomica, doveva esserci un movimento di particelle microscopiche sospese, accessibile all'osservazione, senza sapere che le osservazioni relative ai moti browniani erano già da lungo tempo note."

Avete capito? Dato che non la conosceva, si rifece la meccanica statistica da solo. E il guaio è che c'è da credergli, viste le altre due o tre cosette che Gli riuscì di fare "da solo" in quei tempi...

(Per l'esattezza storica, Einstein non è il solo nome legato alla teoria del moto browniano: ci sono anche Smoluchowski e Langevin. Ma in ordine cronologico il lavoro di Einstein è stato il primo a essere pubblicato, nello stesso 1905, che veramente può essere per Lui definito *annus mirabilis*.)

Scelsi quell'approccio perché mi premeva far risaltare il carattere della ricerca scientifica, che non consiste solo di una successione di scoperte subito codificate in "leggi"; ma è invece prima di tutto confronto con una serie di problemi, di solito così fatti che la soluzione di uno ne fa subito nascere un altro. E poi ci sono i contrasti, le diverse interpretazioni; che spesso si compongono in una visione comune (la "scienza normale" di Kuhn) ma non sempre...

Era troppo per dei ragazzi di 15 anni? Non credo. Credo anzi che proprio a quell'età ci sia bisogno anche di una partecipazione emotiva, per riconoscere valore a qualcosa. Il che non significa (ma questo lo sapete, visto che ormai ci conosciamo bene) che io stia caldeggiando una "scienza romanzata"; ma penso che si possa benissimo coniugare la correttezza e anche il rigore col racconto degli sforzi, degli insuccessi e dei successi. Hanno capito? Questo non so dirlo; a me sono sembrati attenti. Era un genere di discorso probabilmente nuovo per loro, ma forse proprio per questo potrebbe averli interessati.

* * *

Ma torniamo al moto browniano e alla teoria di Einstein. Come ogni teoria che si rispetti, anche questa fa delle previsioni, che possono (debbono) essere messe a confronto coi fatti sperimentali. Nel nostro caso la previsione principale consiste nel calcolo dell'entità di quei movimenti *irregolari* che costituiscono il fenomeno in esame. La difficoltà sta tutta nella parola che ho messa in corsivo: data l'estrema irregolarità del fenomeno, che tipo di previsione sarà possibile fare? Non si può certo dire: in un dato tempo quel certo granello di polline si dovrà spostare di un certo numero di mm (o di micron). Infatti se si fa una registrazione del moto, come quelle che Perrin fece appunto agli inizi del '900 segnando pazientemente la posizione dei suoi granelli o goccioline a intervalli fissi di tempo, si trova un zig-zag che appare disperatamente imprevedibile. Eppure...

La parola magica è *probabilità*. Non possiamo prevedere l'esatto spostamento, ma sappiamo calcolare (Einstein lo fece) la probabilità dei vari possibili spostamenti, o più semplicemente una qualche media. Nel nostro caso, lo *spostamento quadratico medio* va bene. Dal punto di vista delle osservazioni occorrerà quindi raccogliere una *statistica*, ossia una serie di registrazioni degli spostamenti effettuati nello stesso intervallo di tempo, e calcolarne la media dei quadrati. È questa che potremo confrontare con la previsione teorica.

Sto per scrivere la formula di Einstein, che è piuttosto semplice: per favore, chi legge abbia un po' di fiducia in se stesso/a, e non salti a pié giunti questo paragrafo. Lo sforzo potrebbe rivelarsi utile... Dunque: $\langle r^2 \rangle = (kTt)/(\pi\eta a)$. Spiegazione dei simboli: k è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta, t il tempo, η la viscosità del fluido, a il raggio delle goccioline (la formula vale per corpiccioli di forma sferica). $\langle r^2 \rangle$ è lo spostamento quadratico medio, come ho detto sopra. Non posso certo spiegare come ci si arriva (lo trovate ad es.

nel cap. 41 delle famose lezioni di Feynman) ma vorrei commentare e rendere plausibile il modo come compaiono le diverse grandezze.

Prima di tutto, che debba entrarci la temperatura (assoluta) è ovvio, visto che il moto browniano è prodotto dall'agitazione termica. Ed è anche naturale che compaia nella forma kT, visto che l'energia cinetica media di una molecola è $\frac{3}{2}kT$, come tutti sanno, e come aveva dimostrato Maxwell qualche decennio prima. Non è altrettanto evidente che cosa ci stia a fare la viscosità del fluido, ma lo si può intuire pensando che il fluido, proprio perché viscoso, tende a frenare la velocità che la gocciolina riceve negli urti; quindi quanto più viscoso il fluido, tanto minore sarà lo spostamento. Ancor meno chiaro perché figuri *a denominatore* il raggio della goccia. Il motivo è questo: quanto più la goccia è grande, tanti più urti riceve dalle molecole del fluido; ma un maggior numero di urti non produce di per sé uno spostamento maggiore, dato che gli urti tendono a compensarsi. Perciò da questo punto di vista, a conti fatti, il raggio della goccia non conta. Conta però agli effetti del frenamento: esiste infatti una certa legge di Stokes, che ci dice che a piccole velocità la forza frenante dovuta alla viscosità del fluido è proporzionale al raggio della goccia, oltre che alla viscosità del fluido.

Ci può aiutare un piccolo calcolo quantitativo circa l'entità del moto browniano. Domandiamoci di quanto si sposta (nel senso dello spostamento quadratico medio) una gocciolina di 1 mm di diametro, sospesa in acqua a 20 °C, in capo a un'ora. Basta trovarsi il valore della viscosità dell'acqua, e sostituire nella formula, insieme con tutti gli altri dati: il risultato è $2\,\mu$m. E questo non vuol dire che in 2 ore lo spostamento sarà 4 micron, perché la formula dice che è la media del *quadrato* dello spostamento che cresce proporzionalmente al tempo: quindi in due ore la gocciolina si sposterà in media meno di 3 micron ($2\sqrt{2}$).

Si vede bene che per un oggetto piccolo, ma ancora macroscopico, il moto browniano è inavvertibile. Ma le cose non vanno così per oggetti ... più microscopici: per es. un batterio. Se lo prendiamo grande $1\,\mu$m, nella stessa ora lo spostamento ammonterà a 66 micron, che è piccolo alla nostra scala, ma è notevole alla scala del batterio. E se prendiamo una molecola, poniamo grande 10 nm, arriviamo a 0.66 mm.

Ho voluto fare l'esempio della molecola per ricordarvi che il moto browniano è il responsabile della *diffusione*, che tende a cancellare qualsiasi gradiente di concentrazione esistente in una fase fluida. La diffusione è un tipico esempio di processo *irreversibile*, e questo ci permette di associare il moto browniano al naturale aumento del "disordine." Si tratta dunque di qualcosa contro cui si deve combattere quando si cerca di ottenere un comportamento ordinato: in altri termini, il moto browniano è *rumore*, e come tale costituisce ad es. il limite alla sensibilità di delicati strumenti di misura, come i galvanometri del buon tempo antico.

* * *

Eppure si può escogitare un congegno (ideale, ma non troppo, come vedremo poi) che sembrerebbe far uso del moto browniano per andar contro il secondo principio della termodinamica. Il congegno, a quanto ne so, è dovuto al solito Feynman, che lo descrive nel cap. 46 delle sue *Lezioni*. Osservate la figura: si vede una ruota dentata con nottolino e relativa molla di ritegno, collegata a un sistema di palette. Le palette dobbiamo pensarle immerse in un gas, e quindi urtate incessantemente e disordinatamente dalle molecole di questo. Gli urti non hanno effetto sul sistema, perché la ruota è bloccata dal nottolino … ma attenzione! Di tanto in tanto un urto più energico degli altri potrà impartire alle palette, e quindi alla ruota, un'energia sufficiente a sollevare il nottolino: allora la ruota girerà nel senso delle frecce, avanzando di un dente. Il movimento in senso opposto invece è rigorosamente impedito dal meccanismo; quindi la ruota non può che girare pian piano, sempre nello stesso senso.

Si può obiettare che l'evento favorevole (l'urto energico) sarà estremamente raro, ed è vero: ma basta avere pazienza… Vuol dire che la rotazione sarà lentissima, ma non può non avvenire. E si potrà favorirla rendendo più debole la molla d'arresto, così che sia necessaria meno energia per sollevarla; e anche costruendo tutto l'apparato quanto più piccolo si può, in modo che il moto browniano sia più rilevante.

Ma c'è di più: chi ci impedisce di avvolgere un filo all'asse della ruota, e di appenderci un piccolo peso? (Feynman parla di una pulce…). In tal modo non solo avremo fatto girare la ruota, ma avremo anche trovato il modo di sollevare un peso … gratis? Beh no, perché il lavoro necessario per sollevare la pulce dovrà venire in ultima analisi dalle molecole del gas: queste dopo l'urto contro la paletta che gira rimbalzeranno con velocità minore, quindi il gas si raffredderà. Avremo dunque ottenuto lavoro meccanico, ma a spese dell'energia interna del gas. Il primo principio della termodinamica è salvo: non abbiamo realizzato il moto perpetuo.

E qui comincia a squillare un assordante campanello d'allarme: se abbiamo rispettato il primo principio, stiamo però violando platealmente il secondo, che nega proprio questo: che si possa ottenere lavoro a spese del calore estratto *da un'unica sorgente*! Infatti c'è un'unica sorgente di calore, che è il nostro gas. Allora i casi sono due: o il congegno non funziona, ossia abbiamo sbagliato qualcosa, o in realtà c'è anche una "sorgente fredda" della quale non ci siamo accorti. Entrambi i casi sono possibili: dipende da come precisiamo un punto che abbiamo trascurato (di proposito, per portare il discorso a questa … acme drammatica).

Il caso più semplice da capire è il secondo: c'è una sorgente fredda; ma è anche il meno naturale, per cui conviene forse cominciare dall'altro. Supponiamo dunque che tutto l'apparato sia alla stessa temperatura: per es. che sia tutto immerso nel gas, ruota e nottolino compresi. Allora non dobbiamo dimenticare che anche il nottolino è soggetto al moto browniano, e quindi farà degli irregolari "saltelli," normalmente piccolissimi. Ma di quando in quando riceverà dalle molecole urti abbastanza forti da fargli fare un salto più alto: tanto alto da liberare il dente della ruota. Allora questa, sotto il peso della pulce, ruoterà all'indietro.

Per quanto possa sembrare improbabile che il nottolino faccia un salto così grande solo per effetto degli urti molecolari, non è in realtà più improbabile dell'altro evento che abbiamo considerato prima: che le palette ricevano dal gas una spinta sufficiente a vincere la resistenza della molla, tanto da far saltare un dente alla ruota. Feynman dimostra che i due effetti si compensano esattamente, sì che la ruota va alternativamente avanti e indietro, restando quindi in media dov'era. Perciò la pulce non sale e non scende, e il secondo principio è salvo.

A proposito: ho detto e ridetto che le probabilità sono piccole; ma quanto piccole? Ho quasi paura a farvi vedere quanto, perché temo che solo per la vostra educazione (e soprattutto perché non siamo faccia a faccia) eviterei di essere fischiato... Ma sfido il pericolo.

Ho bisogno anzitutto di stimare l'energia necessaria per sollevare il nottolino. Se questo ha massa di un grammo, e va sollevato anche di un solo millimetro, già la forza di gravità richiede un lavoro di circa 10^{-5} J; poi ci sarebbe la molla, ma supponiamo che influisca poco, e teniamoci a questa stima. Per la probabilità in questione posso dare solo un ordine di grandezza, che è il famoso fattore di Boltzmann: $e^{-\varepsilon/kT}$. Inserendo il valore noto di k, ponendo per T i soliti 293 K, e per ε il numero appena stimato, arrivo *per l'esponente* al risultato $-2.5 \cdot 10^{15}$. A conti fatti, la probabilità cercata vale $0,\ldots 1$, dove al posto dei puntini dovete immaginare *un milione di miliardi di zeri*. Piuttosto difficile farsi un'idea di quanto è piccola...

Ma non è male, per il seguito, far notare che se potessimo realizzare una macchinetta a scala molecolare, forse la nostra ε si potrebbe ridurre alla tipica energia di legame molecolare, ossia dell'ordine di 1 eV. Allora la probabilità diventerebbe molto più rilevante: $7 \cdot 10^{-18}$. Comincia a suonare non impossibile, visto che le molecole sono tante. E magari riducendo ancora un po' l'energia...

* * *

Qui debbo fare una parentesi: a chi non sia abituato al modo di pensare dei fisici, tutto questo discorso rischia di apparire poco meno che assurdo: ci occupiamo di eventi in realtà così improbabili da essere a tutti gli effetti impossibili da verificarsi (con un apparato macroscopico, non dimenticatelo). Dove ci può portare un ragionamento del genere? Non è un modo raffinato ma fondamentalmente stupido di perdere il proprio tempo?

La risposta che posso dare è duplice. La prima è: abbiate pazienza, e vedrete che arriveremo a qualcosa di molto concreto, e anche di vostro diretto interesse. La seconda è che molte grandi scoperte della fisica sono state fatte proprio costruendo esperimenti ideali non meno impossibili da realizzare di questo: non ha alcuna importanza la maggiore o minore realizzabilità dell'esperimento, se ci porta a scoprire qualche contraddizione in una teoria, o ci suggerisce un punto di vista nuovo. Nel nostro caso il valore della “macchinetta” di Feynman è soprattutto didattico: illustra magnificamente il gioco dei fenomeni a scala microscopica (moto browniano, fluttuazioni) che a scala macroscopica portano alle più familiari leggi della termodinamica.

Se posso permettermi una nota autobiografica, ricordo che quando lessi per la prima volta questa lezione di Feynman, ne fui così conquistato che decisi che non potevo tenerla per me. Allora insegnavo Istituzioni di Fisica Teorica, e decisi di riservare alcune lezioni, dedicate agli studenti dell'indirizzo didattico, alla descrizione e discussione della macchinetta.

Ma torniamo a noi: dunque abbiamo salvato il secondo principio. Per quanto sembri incredibile, da questa macchinetta si può estrarre ancora di più: addirittura il teorema di Carnot! Ricordate? Esiste un massimo al lavoro meccanico (o di altro genere: elettrico, chimico) ottenibile da un sistema chiuso che scambia con l'esterno calore soltanto a due temperature T_1 e $T_2 > T_1$. Più precisamente, il rendimento non può superare $1 - T_1/T_2$, e lo raggiunge solo se tutto si svolge in modo reversibile.

Per mettere la nostra macchinetta in relazione col teorema di Carnot, dobbiamo metterla in condizione di fare lavoro, ossia di sollevare la pulce: ma non abbiamo appena mostrato che non si può fare? Non si può sotto l'ipotesi che tutto sia a un'unica temperatura; ma se avessimo due temperature disponibili, potremmo decidere di tenere le palette al caldo e la ruota col suo nottolino al freddo. Nessun problema con l'asse che le collega: possiamo farlo di materiale che non conduce il calore.

Ma che cosa si guadagna così facendo? Forse l'avete già visto: se il nottolino sta al freddo, il suo moto browniano è più piccolo, e sarà più difficile che riesca a liberare la ruota. Allora non si avrà più l'equilibrio di prima: sarà più probabile che la ruota avanzi invece di retrocedere, e quindi la pulce verrà sollevata. Abbiamo costruito qualcosa che può fare lavoro!

Mi aspetto la domanda: “dove sono gli scambi di calore del teorema di Carnot?” Ci sono, ci sono... Abbiamo già visto che le palette sottraggono calore al gas; ma d'altra parte, quando il nottolino si solleva, per comprimere la molla ha bisogno di energia, e la prende appunto dal gas caldo; poi, superato il dente, il nottolino ricade, urta anelasticamente la ruota, e quell'energia si riconverte in calore, che passa alla sorgente fredda. Si capisce che non tutta l'energia sottratta al gas caldo viene usata in questo modo, perché c'è anche da sollevare la pulce: Feynman riesce a dimostrare che il rapporto fra queste energie è proprio quello previsto dal teorema di Carnot.

Non posso spendere spazio per darvene una dettagliata spiegazione, ma voglio solo indicare l'idea centrale: il fatto è che per sollevare il nottolino occorre una certa energia ε, come abbiamo già detto. Questo può accadere o perché le palette ricevono un grosso colpo dal gas caldo, o perché il nottolino lo riceve dal gas freddo. I due eventi hanno una certa probabilità, che ci è stata insegnata da Boltzmann, e che in entrambi i casi dipende dal rapporto ε/kT: per questa via entrano in ballo le due temperature. D'altra parte l'energia necessaria non è la stessa nei due casi, perché quando sono le palette che agiscono, c'è anche da sollevare la pulce, e questo richiede un certo lavoro w: ne segue che per avere equilibrio nel sistema, ossia uguali probabilità dei due eventi, occorre che sia $\varepsilon/kT_1 = (\varepsilon+w)/kT_2$, che è proprio il teorema di Carnot. Se la pulce è un po' più leggera si solleverà, ma il lavoro sarà un po' minore del massimo ottenibile; se è più pesante scenderà, ossia la macchinetta funzionerà al rovescio, il che ci dimostra che è reversibile. E questo è più o meno tutto. Non vi sembra geniale?

Nella lezione di Feynman c'è anche di più: si arriva perfino a spiegare i diodi a giunzione... Ma la cosa non ci riguarda e la lascio da parte. Dobbiamo invece ricordare che le lezioni di Feynman risalgono a quasi quarant'anni fa: il tempo non è passato invano, e quello che allora era un esperimento ideale, negli ultimi tempi è diventato qualcosa di reale e sta perfino cominciando a risolvere problemi aperti della fisiologia e della biologia molecolare.

Visto però che ho scritto abbastanza, di ciò parleremo un'altra volta.