La candela

Riprendiamo il discorso sulla probabilità dove l'avevamo lasciato tre puntate fa. (Nel frattempo, vi preannuncio un possibile ritorno della telenovela dei ritardi: infatti al momento in cui scrivo il 34 sulla ruota di Cagliari è in ritardo di 177 estrazioni.)

Dopo la discussione che abbiamo fatto sul significato della legge dei grandi numeri e le confusioni frequenti con la presunta necessità degli eventi casuali di "rispettare" i calcoli di probabilità, è ora il caso di affrontare il tema più impegnativo, che avevo lasciato da parte per non mescolare problemi di natura diversa. Mi riferisco alla questione dei fondamenti, ossia: che cosa vuol dire "casuale"? come si fa a valutare la probabilità di un evento? come si decide se due eventi sono indipendenti?

È chiaro che ora non penso più al mondo delle astrazioni matematiche, dove le cose si mettono a posto con acconci assiomi e definizioni; penso invece al *mondo reale*, quello dove gli eventi accadono e dove si operano stime, si fanno scommesse, si pagano premi d'assicurazione, ecc.

La storia della probabilità è lunga (almeno 4 secoli) e non posso ripercorrerla qui, anche perché la conosco solo approssimativamente. Nel corso di questo tempo il concetto si è evoluto, com'è naturale, e in particolare nel secolo scorso è stato oggetto di ampie discussioni a livello epistemologico. Molto più vicino a noi, e portandoci su un terreno più pratico, non sono molti anni che la probabilità ha trovato spazio (almeno ufficialmente) nei nostri programmi di matematica per tutte le fasce scolastiche. Ho scritto "almeno ufficialmente" perché — se non sono male informato — l'adesione degli insegnanti di matematica è stata tutt'altro che entusiastica, per cui credo che siano pochi i casi in cui la probabilità riceve lo spazio che sulla carta dovrebbe avere.

Però questo intervento nei programmi ha avuto un effetto: ha causato (anzi è stato preceduto da) un'ampia discussione su *come* presentare la probabilità, e questa discussione ha ripercorso il dibattito epistemologico cui accennavo sopra. Si sono quindi esaminati differenti approcci, che si sono susseguiti nella storia o sono stati sostenuti da diversi studiosi: di questo vorrei dare un sommario resoconto.

* * *

Nella discussione che dicevo, si confrontarono quelle che venivano chiamate diverse "concezioni" della probabilità:

– la classica
– l'assiomatica di Keynes
– l'assiomatica di Kolmogorov

– la frequentista
– la soggettivista.

Dovrei ora far cenno a queste concezioni (parola che ho messo tra virgolette per una buona ragione, che mostrerò più avanti). Il compito non è affatto semplice, e cercherò di comportarmi un po' da giornalista, ossia di buttar lì qualche slogan o poco più, che aiuti a focalizzare e a ricordare in che cosa queste concezioni differiscono.

Per la concezione classica non ci sono veri problemi, perché è quella che spontaneamente tutti adottiamo nei casi semplici e correnti, come i vari tipi di giochi. Non a caso si chiama "classica" perché è la più antica: la si può far risalire a Pascal (*De alea geometriæ*, 1653) e in forma più compiuta a Jacques Bernoulli (*Ars conjectandi*, 1713).

Tutti siamo d'accordo che la probabilità che appaia una data faccia nel lancio di un dado è 1/6 (se il dado è giusto); se ci si chiede su che base lo diciamo, la risposta potrà essere "per simmetria," oppure "perché le 6 facce sono equivalenti," o "perché non c'è nessuna ragione di preferire una faccia all'altra" ... tutte formule che trasmettono la stessa idea: simmetria, equivalenza, nessuna preferenza...

Sappiamo anche che le cose in realtà non sono così semplici, perché anche lanciando un dado si può barare, il che vuol dire rompere la simmetria, creare una preferenza... Per questo ci sono delle regole che un lanciatore onesto deve rispettare: agitare per bene il bicchiere, lanciare i dadi lontano, farli correre sul tavolo, ecc.

Ricorderete che ne abbiamo già discusso, nella prima puntata dedicata al nostro tema, per cui non insisto. Brevemente, da qui nasce la definizione di probabilità come "rapporto tra il numero dei casi favorevoli e di quelli equiprobabili," dove il problema sta nella circolarità della definizione (un vago ricordo: *in definitione definiendum ingredi non potest*) che si risolve appunto perché l'equiprobabilità è stabilita "a priori" in base alla simmetria.

Sulle concezioni assiomatiche, che sono molto più moderne (non so le date precise, ma direi 1930, più o meno) non darò dettagli. Mi preme solo rimarcare che si tratta di definizioni di probabilità tutte interne alla matematica, ossia create allo scopo di dare un fondamento rigoroso alla teoria della probabilità come ramo della matematica.

Come ho già ricordato più volte, per avere il rigore si paga un prezzo: il completo distacco dalla realtà. Un sistema di probabilità definito per via assiomatica è del tutto arbitrario, e nasce quindi il ben noto problema: come può essere applicato al mondo reale?

Non posso fare a meno di ricordare con l'occasione un famoso articolo di E.P. Wigner, Nobel 1963 per i suoi contributi alla fisica nucleare e alla fisica teorica, specialmente nell'applicazione dei principi di simmetria. L'articolo di

Wigner, scritto nel 1960, aveva come titolo: "L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali." Anche se ci allontana un po' dal tema, mi sembrerebbe brutto non citarvene almeno l'attacco:

> "Una storiella racconta di due amici, ex-compagni di liceo, che parlano del loro lavoro. Uno dei due è uno statistico, e si occupa di tendenze delle popolazioni; mostra al suo vecchio compagno la copia di un suo articolo. L'articolo parte, come di regola, con una distribuzione gaussiana; lo statistico spiega al compagno il significato dei simboli in relazione alla popolazione reale, a quella media, ecc. L'amico lo guarda un po' incredulo, temendo che lo statistico lo stia prendendo in giro, e gli chiede:
>
> — Ma come fai a saperlo? — e poi: — che cos'è questo simbolo?
>
> L'altro risponde: — ah, questo è pi greco.
>
> — Sarebbe a dire?
>
> — È il rapporto della circonferenza al diametro.
>
> — Beh adesso esageri — ribatte il compagno — di sicuro la tua popolazione non ha niente a che fare con la circonferenza di un cerchio!"

Finita la storiella di Wigner, ricordo che anche di questo abbiamo già parlato: la probabilità intesa come teoria matematica può essere applicata al mondo reale a patto che si sappia

a) se il campo di fenomeni che c'interessa è descrivibile in termini probabilistici;

b) quali siano le probabilità da attribuire a certi eventi base.

Ho già sottolineato a suo tempo che la decisione su questi due punti non è tra i compiti e nei poteri del matematico, ma dell'esperto di volta in volta competente su quel campo di fenomeni.

* * *

Passiamo alla concezione frequentista. Anche questa è nata in forma precisa press'a poco negli stessi anni, ad opera di R. von Mises (con precursori fin dall'800). Si assume che il solo fondamento possibile agli argomenti probabilistici sia da ricercare nei fatti empirici, e che quindi la probabilità di un evento non possa essere altro che un "limite" della frequenza che viene osservata se si ripete molte volte la prova. (Da qui il nome "frequentista.")

La difficoltà principale con cui la posizione frequentista si scontra sta proprio nel significato da dare a quel limite (ecco perché le virgolette): non si può trattare del consueto significato matematico, in quanto non sono minimamente soddisfatte le ipotesi nelle quali si può definire il limite in matematica. E del resto la cosa non deve stupire, dal momento che stiamo parlando di una successione di eventi *reali*, che sono in numero finito, per quanto grande... Dirò più avanti come — secondo me — alla visione frequentista si può ugualmente riconoscere un ruolo importante nei fondamenti della probabilità.

Infine, la concezione soggettivista. Questa (dovuta principalmente a De Finetti) afferma che l'unico possibile fondamento dell'idea di probabilità sta nell'atteggiamento che un qualche *soggetto* assume in condizioni d'incertezza. Detto in soldoni: "a quanto saresti disposto a scommettere sul verificarsi dell'evento?" Ogni soggetto avrà i suoi criteri, e non ha senso chiedersi se siano giusti o sbagliati; anche se in molti casi (v. il solito esempio dei dadi) questi criteri sono decisamente universali.

Un altro modo di distinguere i diversi approcci alla probabilità, su cui dovrò ritornare, sta nella distinzione tra probabilità *epistemica* e *non epistemica.* La prima coincide sostanzialmente con la visione soggettivista: assume che la probabilità sia solo il nostro modo di trattare condizioni d'insufficiente conoscenza del fenomeno (o delle sue cause). La seconda asserisce invece che esistano in natura situazioni *intrinsecamente* incerte, nelle quali un approccio probabilistico è necessario.

Tornando al dibattito sull'insegnamento della probabilità, mi pare che esso si sia concluso con la vittoria della posizione soggettivista. Per fare un solo esempio, nei programmi 1979 per la scuola media uno dei temi è intitolato "matematica del certo e matematica del probabile." In altre occasioni si parla di "matematica in situazioni d'incertezza." Non si tratta a mio giudizio di una scelta felice; nel seguito cercherò di motivare questa mia posizione.

* * *

Passo ora a esporre il mio personale (e pochissimo autorevole) punto di vista su queste diverse concezioni; così potrò anche spiegare perché il termine "concezioni" è a mio parere improprio.

Partiamo dalla concezione assiomatica: come ho già detto, questa (nelle due versioni) costituisce la base rigorosa per la struttura matematica, che in quanto tale è "neutra" di fronte alla realtà, ma essenziale per le applicazioni e anche per lo stesso fondamento empirico. Voglio dire che da un lato la teoria matematica *non parla della realtà*, ma dall'altro essa è necessaria per costruire un apparato di concetti e di leggi che consentono il necessario *confronto con la realtà* medesima. Infatti quel confronto non si fa quasi mai direttamente sugli assiomi o su conseguenze elementari, ma su sviluppi anche complessi: nel caso della probabilità un esempio potrebbe essere la legge dei grandi numeri, di cui abbiamo già parlato.

La concezione classica, la frequentista e la soggettivista affrontano invece il problema di come *stimare* le probabilità nelle situazioni reali, e quindi *non sono matematica.* Forse sono applicabili tutte, in riferimento a situazioni diverse.

La concezione classica ha il suo fondamento in situazioni "simmetriche," in cui sembra ragionevole postulare un'equiprobabilità. Ma restano due problemi: uno relativo alla simmetria, l'altro che si tenta di risolvere col "postulato empirico del caso."

Non è banale affermare che le sei facce di un dado sono equiprobabili *per simmetria*, e tanto meno la si può considerare un'affermazione valida a priori. Il comportamento di un sistema fisico sotto simmetrie va studiato come una legge di natura: l'esempio della non conservazione della parità è abbastanza recente per insegnare. Ricordo che ne abbiamo parlato poco più di un anno fa, e non posso tornarci su: mi limito ad accennare che quella che sembrava un'ovvia legge di simmetria, da poter assumere "a priori" (l'invarianza delle leggi fisiche per riflessioni speculari), si è dimostrata, circa 50 anni fa, sperimentalmente falsa. Dunque sulla simmetria, almeno dal punto di vista epistemologico, bisogna andarci cauti...

Quanto al postulato empirico del caso ne abbiamo già discusso, e abbiamo visto che esso ha il ruolo di un postulato interpretativo: la grandezza matematica "probabilità" ha come corrispettivo fisico la "frequenza relativa." È vero che non possiamo essere certi dell'esatta concordanza tra probabilità e frequenza, a causa delle fluttuazioni, ma ciò accade in qualsiasi esperimento: sappiamo che esistoo sempre gli errori casuali. J. Bernoulli parla di un criterio di "certezza morale"; in modo del tutto analogo, oggi nella pratica di ogni scienza sperimentale è corrente adottare un "limite di fiducia." Esempio: la massa del pianeta "simil Terra" recentemente osservato vale tra 2.7 e 11 volte quella della Terra, entro il limite fiduciale del 68%.

Questa discussione risolve anche il problema della concezione frequentista, ossia l'ambiguità del "limite." In pratica si tratta solo di dire che l'unico criterio possibile per valutare la correttezza di un'ipotesi di probabilità è di metterla a confronto con una serie sperimentale, usando le tecniche statistiche standard. E non c'è conflitto con la concezione classica: ipotesi di simmetria possono bene essere di guida, quando possibile; in altri casi potranno esserci altri criteri; ma l'ultima parola sta sempre all'esperimento.

La concezione soggettivista può essere discussa da due punti di vista. In senso filosofico, si può ritenere che quello sia l'unico fondamento possibile, in tutti i casi, per i giudizi di probabilità (posizione che non mi sento di sottoscrivere). In senso pratico, si può asserire che esistono situazioni "d'incertezza" in cui non ci sono fondamenti obbiettivi per una stima di probabilità, ma le tecniche probabilistiche possono ugualmente riuscire utili. Mi riferisco ad es. a molte applicazioni economiche, di ricerca operativa, e simili.

Un esempio semplice è il totocalcio. Non esistono criteri oggettivi per attribuire le probabilità ai tre esiti (1, X, 2) di ciascun incontro, e non ha neppure senso pensare a una stima di frequenze (non possiamo mica far ripetere le partite, *nelle stesse condizioni*, a nostro piacimento!); tuttavia un'attribuzione soggettiva di probabilità mi può essere utile, se voglio decidere che schedina giocare. Una volta assegnate le "mie" probabilità, un programma a calcolatore può indicarmi (in teoria!) le combinazioni più probabili. S'intende che se le mie stime sono sbagliate, non farò né 14 né 13 né 12: peggio per me...

Ecco dunque perché a mio parere non si dovrebbe parlare di "concezioni": esse non si escludono a vicenda, ma giocano invece diversi ruoli nel fondamento della probabilità e nelle sue applicazioni alle scienze sperimentali e alla vita pratica. Tutte sono utili e anzi necessarie: nessuna è più vera o giusta di un'altra.

* * *

L'accenno che ho fatto poc'anzi alla visione soggettivista in senso filosofico, mi riporta a quanto dicevo sull'affermazione che questa ha avuto — con mio dispiacere — nei programi di matematica. Il mio dissenso sta in questo: che mentre riconosco l'utilità di un approccio soggettivista in certe situazioni, vederlo come il solo e unico fondamento della probabilità significa colorare in senso soggettivista (filosofico) *tutte* le applicazioni della probabilità: comprese quelle dove l'intervento di un soggetto è assai meno evidente o quanto meno discutibile.

Credo abbiate già capito che sto ora pensando alla fisica, dove la scelta tra un'interpretazione epistemica o non epistemica della probabilità è tutt'altro che innocente, e risulta ancor oggi largamente controversa. Per questo motivo non posso vedere con favore che si contrabbandi una scelta filosofica sotto l'apparenza neutrale di un capitolo della matematica...

Un lettore molto attento si sarà accorto che finora non ho toccato una delle questioni chiave che avevo annunciato all'inizio: "che cosa vuol dire casuale?" A questo punto potrei magari restringere il campo, chiedendomi che cosa vuol dire casuale *in fisica*. Ma anche così ristretto, il campo rimane troppo vasto per affrontarlo in questa puntata, che ormai deve volgere alla fine: pensate che dovremmo da un lato occuparci di caos, e dall'altro dell'indeterminismo in meccanica quantistica...

Sarà per un'altra volta.