

La candela

Ebbene sì, lo confesso: non ho mai letto Proust. Tuttavia, avendo trovato qua e là nel corso degli anni innumerevoli rimandi e citazioni, non posso ignorare il sapore delle *madeleines*, che scatena la folla dei ricordi... Il caso che mi è capitato di recente è assai più prosaico: al posto di un pasticcino nel tè, è stata una parola letta a farmi tornare a mente dei ricordi d'infanzia. Ecco la storia, e vedrete che una certa attinenza col tema di questa rivista ce l'ha.

Stavo leggendo, non ricordo più dove, un articolo sulla presente crisi economico-finanziaria. L'autore spiegava come un Paese che si trovi ad avere un forte debito pubblico e uno scarso sviluppo economico sia a rischio di non poter onorare il debito; per questo varie istituzioni internazionali (Unione Europea, FMI) impongono misure di austerità di vario tipo: tagli all'assistenza pubblica, una generale limitazione della spesa statale, ecc. Osservava poi che molte di tali misure rischiano di avere un effetto perverso: restringendo i consumi e il credito all'impresa, riducono o annullano la crescita economica, rendendo più oneroso il soddisfacimento del debito. E concludeva parlando di "innesto di una spirale"

Ed ecco la parola magica: "innesto." Che nella fattispecie era uno sfondone, visto che avrebbe dovuto essere "innesco"; scambio che purtroppo mi capita di leggere e sentire sempre più di frequente, insieme col suo compagno (che odio ancora di più) "rilevatore" invece di "rivelatore." Ma ora l'interesse non sta nella sempre più scarsa conoscenza della lingua italiana, argomento che mi sta a cuore e (sono sicuro) mi rende antipatico a molti; sta invece in ciò che l'"innesto" mi ha fatto tornare in mente.

Non vi parlerò di zia Leonia, ma di mio padre: era lui che nel tempo libero fra le altre cose praticava innesti. Il suo lavoro era un altro, ma per hobby coltivava piante di tutti i generi. Ho scritto "hobby" e non avrei dovuto, perché a quel tempo (anni '30 dello scorso secolo) il concetto era sconosciuto in Italia, e sarebbe stato comunque espresso con una parola diversa, visto che le parole straniere (segnatamente inglesi) erano vietate. Del resto esisteva l'Opera Nazionale Dopolavoro, che aveva per scopo istituzionale di organizzare il tempo libero dei lavoratori; quindi niente attività libere individuali, spontanee... Anche se — per fortuna — nessuno si sognava di censurare la coltivazione di un giardino.

Posso restringere l'epoca di cui parlo agli anni tra il 1935 e il 1943, nei quali abitavamo a Ostia Lido (allora Lido di Roma) in un appartamento al primo piano, con una grande terrazza a L, che mio padre aveva riempito di piante: da fiore, ma anche da frutto, ortaggi, aromatiche... È a questo periodo che risalgono le mie (scarse) nozioni pratiche di botanica, inclusi gli innesti di cui

parlavamo. Imparai perché s'innesta il pesco sul susino, che cos'è una talea o una margotta; ma soprattutto ebbi occasione di vedere da vicino e con continuità la crescita di diverse piante, la produzione di fiori e frutti. . . Niente di straordinario, direte; ma dato che io non ho ereditato da mio padre questa passione, i miei figli non hanno fatto le stesse esperienze, e credo che oggi siano sempre meno i ragazzi di città che possono farle.

Dicevo della terrazza a L, e coi mezzi di oggi potete vederla tutti: basta andare a cercare, sulle mappe di Google, la vista da satellite di Ostia Lido, andare al piazzale della Posta, angolo Corso Duca di Genova. Il palazzo che dà su quella strada, di fronte alla Posta, mostra appunto la terrazza a L (non ben visibile perché il lato nord è in ombra). Per inciso, il palazzo della Posta di Ostia è un edificio importante dell'architettura razionalista, e so che è stato restaurato di recente. Ma per me, nei miei ricordi, era soprattutto un campo di gioco: in quel tempo remoto i bambini usavano ancora giocare in strada, e il colonnato rivestito di mattoni rossi che circonda la vasca circolare era ideale per giocare "a nasconderella" (così si dice a Roma).

Potrei ancora intrattenervi a lungo coi miei ricordi, per es. raccontando perché la nostra residenza a Ostia s'interruppe bruscamente nell'autunno del 1943. Dico solo che la causa immediata fu l'armistizio dell'8 settembre, e il conseguente controllo assunto in tutto il Paese dalla Wehrmacht. Si riteneva probabile che l'esercito alleato, che stava risalendo l'Italia, avrebbe tentato uno sbarco nei pressi di Roma; perciò il comando tedesco ordinò lo sgombero dei civili da tutta la fascia costiera nei pressi della città. Avemmo 24 ore di tempo per lasciare la casa.

In realtà quella fine del 1943 segnò una brusca discontinuità della mia vita, non solo per la ragione che ho detto, ma anche perché avevo terminato la scuola inferiore (che allora non era ancora scuola media, ma su questo non posso dilungarmi) e cominciai il liceo scientifico, che esisteva soltanto a Roma: un unico liceo scientifico in tutta Roma, per quanto possa sembrare incredibile.

Per di più subito dopo l'armistizio alcuni giovani militari, sbandati per la dissoluzione dell'esercito italiano, vennero nascosti nello scantinato del palazzo e forniti di abiti civili. Dopo di che tentarono la fortuna del rientro a casa, e non ne seppi più niente. Ma quei ragazzi erano avieri di un corpo speciale, e frequentavano dei corsi di Istituto Tecnico Industriale con specializzazione radiotecnica; anni dopo venni a sapere che venivano addestrati per un progetto allora agli inizi, e che non poté essere portato avanti visti gli sviluppi della guerra: la realizzazione di un radar. Per ridurre al minimo i bagagli, e per ringraziamento perché portavo da mangiare nel loro rifugio, mi lasciarono alcuni libri: ne ricordo uno di elettrotecnica e uno di radiotecnica, che nell'inverno seguente studiai con passione. Imparando le leggi dell'elettromagnetismo, come sono fatti trasformatori, motori e generatori elettrici; il funzionamento delle valvole termoioniche (alias tubi elettronici) e dei ricevitori e trasmettitori radio. Dico "studiai" perché di

vero studio si trattava: facevo anche gli esercizi, e conservo ancora un quaderno per dimostrarlo. . .

Che senso ha raccontarvi questo? Soltanto mostrare che la mia vocazione per la fisica era ben stabilita già allora (a 13 anni) anche se io ne ero del tutto inconsapevole: sarebbe passato ancora un anno prima che sentissi parlare di fisica a scuola, e solo all'università avrei scoperto la “vera” fisica.

Ma chiudiamo qui con le mie madeleines, non senza notare però una coincidenza, alla quale non avevo pensato quando ho deciso il mio *incipit* proustiano. Come sappiamo, il lavoro di Einstein sulla RG si sviluppa tra il 1911 e il 1915, e *Du côté de chez Swann*, primo volume della *Recherche*, esce nel 1913. Ignoro se Einstein abbia mai letto Proust, mentre curiosando in rete ho trovato il seguente brano di una lettera di Proust del 1922:

“[Vettard] mi lusinga troppo senza però conoscermi, perché io possa dire che il suo articolo è giusto. Che io sia citato a fianco di un Einstein!”

* * *

Il mio progetto di esporre le idee di base della RG, e magari parlare di buchi neri, è ancora incompiuto, sebbene gli abbia dedicato ben quattro puntate, a partire da oltre un anno fa. Cerchiamo dunque di portarlo avanti, anche se credo che non sarà possibile concluderlo neppure stavolta. Ridendo e scherzando, alla fine ne uscirà un piccolo libro. . .

E adesso arriva il difficile. . . Infatti dovremo ragionare su questioni che sono squisitamente matematiche, anche se non ci sarà bisogno di scrivere formule complicate. (È una visione ingenua della matematica, credere che le complicazioni stiano nell'aspetto intimidatorio di certe “espressioni,” come quelle che fanno il tormento di molti studenti. In realtà quando la matematica è difficile lo è per i *concetti*, non per il formalismo.) Ma la storia che sto per raccontarvi ha anche alcune caratteristiche di un “giallo”: c'è una specie di “delitto,” dei sospetti, perfino il dubbio se davvero di un delitto si tratti. . .

La cosa più strana è che tutto nasce da qualcosa di apparentemente innocente, che si ritrova nel lavoro originale di Schwarzschild, e concerne la coordinata r , della quale avevo detto (chissà se lo ricordate): “Non potremo più essere sicuri che r misuri la distanza dall'origine [...]” In effetti Schwarzschild fa uso di due diverse coordinate radiali, che indica con r e con R , legate tra loro da una semplice relazione che non vi scrivo. Perché lo fa? Il motivo è che la r è quella che lui ritiene essere la *vera* coordinata radiale, mentre R è vantaggiosa perché fornisce un'espressione più semplice per la metrica.

Ma che vuol dire “vera coordinata radiale,” dal momento che ho sottolineato in passato che le coordinate sono solo etichette utili a contraddistinguere i punti dello spazio-tempo? A parte che a quel tempo il punto di vista che ho appena espresso sulle “etichette” non si era ancora affermato, ciò che soprattut-

to interessa Schwarzschild è una cosa sola: che la metrica abbia singolarità solo per $r = 0$, ossia nell'origine delle coordinate spaziali.

Da dove nasce questo requisito? È presto detto: Schwarzschild si propone di dare una soluzione esatta delle equazioni di Einstein, valida per il caso di una *massa puntiforme* situata nell'origine delle coordinate. So bene che a chi non sia un fisico l'idea di una massa puntiforme suscita una certa diffidenza, per non dire peggio, visto che nel mondo reale le masse puntiformi non esistono. Di più: ricordate che tutti i calcoli (quelli di Einstein e quelli di Schwarzschild) verranno messi alla prova nel caso concreto di Mercurio in orbita attorno al Sole: sarebbe il Sole la massa puntiforme? Il Sole ha un diametro che supera di un bel po' il milione di km, mentre la minima distanza da Mercurio è poco più di 46 milioni di km; non sembra tanto corretto trattare il Sole come puntiforme!

* * *

Però questo modo di trattare il moto dei pianeti ha un illustre precedente storico nello stesso Newton, che anzi si trovò di fronte un problema ben più serio, quando provò a confrontare il moto della Luna attorno alla Terra con quello di un grave nell'immediata prossimità della superficie terrestre: come si poteva sperare di applicare la semplice legge $1/r^2$ in quelle condizioni? Sembra che il problema abbia bloccato Newton per almeno dieci anni nella stesura dei *Principia*. Poi riuscì a dimostrare che il campo gravitazionale di un corpo a simmetria sferica è lo stesso che produrrebbe (all'esterno del corpo) la sua massa se fosse tutta raccolta nel centro: appunto una massa puntiforme.

Il precedente motivava lo studio della geometria dello spazio-tempo attorno a una massa puntiforme; inoltre Schwarzschild porta un serio argomento a favore del suo risultato, quando dimostra che la metrica da lui trovata è *unica*. Per essere precisi: la soluzione delle equazioni di Einstein, statica e a simmetria sferica (su questo abbiamo detto nella puntata precedente) col requisito addizionale che a grande distanza dall'origine tenda allo spazio-tempo piatto di Minkowski, non può che essere quella da lui scritta, con la sola arbitrarietà di un parametro (che Schwarzschild indica con α). Quel parametro (dice Schwarzschild) è legato alla massa del corpo centrale.

Che cosa significa tutto ciò? Possiamo applicarlo al caso del Sole? La risposta è affermativa: vediamo perché. Sicuramente lo spazio-tempo attorno al Sole, come abbiamo visto nell'ultima puntata, sarà statico e a simmetria sferica: quindi la sua metrica dovrà essere quella di Schwarzschild. Ma possiamo essere certi che il valore di α sia proprio quello che corrisponde alla massa del Sole? Per rispondere dobbiamo aprire una parentesi. "Un'altra?" dirà qualcuno... Ebbene sì: se vogliamo capire come teorie altamente astratte possano essere messe a confronto col mondo reale, con le misure degli astronomi, ogni tanto dobbiamo tornare, per così dire, coi piedi per terra.

Se aprite un qualsiasi libro di astronomia, di astrofisica, ma probabilmente anche un testo di Scienze per la scuola secondaria, ci trovate il valore della massa del Sole. O meglio, ricorrete a wikipedia, dove trovate scritto $M = (1.98892 \pm 0.00025) \cdot 10^{30}$ kg. Ma come si arriva a questo numero? Essendo fuori questione di mettere il Sole su una bilancia, il metodo dev'essere un altro... Nella voce di wikipedia (inglese) sulla massa solare trovate anche spiegato come si misura. Senza entrare in dettagli, per evitare di allungare troppo la parentesi, la massa del Sole si ricava da due dati: la distanza Terra-Sole (più esattamente, il semiasse maggiore dell'orbita della Terra) e il periodo di rivoluzione della Terra stessa (quello che si chiama "anno siderale"). In realtà, per poter dare la massa del Sole in kg, occorre anche conoscere la *costante di gravitazione* G ; altrimenti le misure ci danno solo il valore del prodotto GM , che per i nostri scopi è sufficiente, come vedremo subito.

* * *

Il punto che occorre tenere a mente, chiusa la parentesi, è che la massa del Sole (o meglio il prodotto GM) si determina studiando il moto di un pianeta attorno al Sole. Torniamo ora alla RG e alla soluzione di Schwarzschild: possiamo usarla (Schwarzschild lo fa) per determinare come si muove un pianeta nello spazio-tempo curvo generato dal Sole. Per guadagnare tempo e spazio, evito di spiegare come si procede: vi chiedo un piccolo atto di fede nel risultato che ora vi enuncio. Dallo studio del moto di un pianeta nella metrica di Schwarzschild si ricava che in una prima approssimazione il pianeta segue le leggi di Keplero, e quindi dal moto del pianeta si può calcolare la massa del Sole come si sarebbe fatto prima della RG. Ho detto "prima approssimazione," perché sappiamo già che la soluzione esatta fornisce qualcosa di nuovo: la precessione del perielio. Ma questo non influisce sul discorso che sto facendo riguardo alla massa.

In realtà, se qualcuno di voi ha seguito davvero bene quello che vado dicendo, dovrebbe avere in mente una domanda: "Dunque: dal moto di un pianeta si calcola la massa del Sole; ma poco sopra ci hai detto che nella metrica di Schwarzschild la massa non figura in modo esplicito; ci hai solo detto, in modo un po' nebuloso, che compare un parametro α . Come stanno esattamente le cose?"

La risposta sta in una formuletta, che nel lavoro di Schwarzschild non c'è ma si può dedurre facilmente, e che vi riporto perché avrà una certa importanza per il seguito:

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2}.$$

Dalla formula si vede che α è una lunghezza, oggi universalmente nota col nome di "raggio di Schwarzschild." Se per M inseriamo la massa del Sole, troviamo $\alpha = 2.96$ km; il fatto che il raggio di Schwarzschild del Sole sia assai più piccolo del suo raggio fisico, che è quasi un milione di km, è un'indicazione che la curvatura dello spazio-tempo prodotta dal Sole è assai piccola, e piccoli sono

tutti gli effetti conseguenti. Sappiamo infatti, per fare un esempio, che la deflessione gravitazionale della luce nei pressi del Sole è stata difficile da misurare.

* * *

Facciamo ora il classico passo indietro. Avevo scritto a un certo punto: “ciò che soprattutto interessa Schwarzschild è una cosa sola: che la metrica abbia singolarità solo per $r = 0$, ossia nell’origine delle coordinate spaziali.” Dopo la lunga discussione appena conclusa, sappiamo perché l’origine delle coordinate abbia un ruolo speciale: lì si trova la massa che genera il campo gravitazionale; o meglio — usando il linguaggio della RG — incurva lo spazio-tempo.

Ma che vuol dire “singolarità”? Questo è un termine del gergo matematico, e detto nel modo più semplice che mi riesce sta a significare che la soluzione di Schwarzschild avrà come coefficienti della metrica delle funzioni delle 4 coordinate spazio-temporali, alle quali si richiede che non debbano annullarsi, e che siano funzioni “regolari,” ossia continue e derivabili, in tutti i punti dello spazio-tempo fatta al più eccezione per quelli con $r = 0$. Fin qui Schwarzschild; ma la storia dei buchi neri, come ho già anticipato, è appena agli inizi, e il giallo non si è ancora manifestato: non si è ancora avuta la *notitia criminis*. Questo accade quando entra in scena un altro personaggio: David Hilbert.

Stiamo parlando di un grande matematico, attivo agli inizi del secolo scorso; difficile dire se sia stato il più grande (simili classifiche a mio giudizio hanno poco senso, salvo in casi davvero eccezionali, come potrebbe essere stato Gauss un secolo prima di Hilbert) ma era certo il più influente, in vari sensi. Basti ricordare la lista dei famosi “23 problemi di Hilbert,” che questi enunciò nel 1900 e che conteneva quelli che a suo giudizio erano i più grandi problemi aperti della matematica. Ebbene: la lista è stata stimolo alla ricerca matematica per tutto il 20-mo secolo; molti di quei problemi sono stati risolti, ma alcuni attendono ancora una soluzione completa e definitiva.

Hilbert ha a che fare col nostro giallo perché s’interessò attivamente al problema della RG, tanto che per un certo tempo si discusse se la formulazione delle famose equazioni fosse stata data prima da Einstein o da Hilbert. In realtà la discussione non è mai finita, ed è troppo complessa per poterne parlare qui (senza contare che ne so pochissimo). Ma sembra accertato che lo stesso Hilbert abbia riconosciuto la priorità e indipendenza di Einstein nella deduzione delle ormai citatissime equazioni; come è pure accertato che anche Hilbert arrivò alla forma finale delle equazioni, ma senza aver contribuito in modo significativo ai ragionamenti *fisici* che ne stanno alla base.

Però quanto ho appena detto non ha niente a che fare con Schwarzschild; è invece importante un lavoro che Hilbert pubblicò nel 1917, dove ritrovava la soluzione di Schwarzschild in modo diverso e *usando la coordinata R* invece della r . Ma che importanza può avere questo? Presto detto: se si scrive la metrica usando la R , l’espressione della metrica *presenta una singolarità per $R = \alpha$* . Anche nell’articolo di Schwarzschild c’è la stessa espressione, ma lui non si cura della

singolarità perché vede R solo come una variabile ausiliaria, senza significato fisico: ho già detto che per Schwarzschild la *vera* coordinata è la r .

La scelta fatta da Hilbert, unita al suo prestigio, fece sì che da allora in poi la soluzione di Schwarzschild venisse sempre scritta nella forma data da Hilbert, che praticamente in tutti i libri è indicata come “soluzione di Schwarzschild” *tout court*. E la cosa fu foriera di conseguenze profonde, che dovremo guardare un po’ da vicino. Tuttavia, prima di procedere, non voglio nascondervi una preoccupazione: che molto di quello che ho scritto finora vi sia apparso astruso e forse anche poco interessante, una serie di arzigogoli puramente matematici, che non si vede come possano avere importanza anche solo per la fisica. . .

Vorrei perciò insistere nel chiedervi pazienza: le cose stanno diversamente, ma per convincersene occorre seguire la storia, che è ancora lunga, e purtroppo anche complicata. Ma mi sembra un eccellente esempio di come una teoria fisica (nel nostro caso la RG) si sviluppa, non di rado ben al di là delle intenzioni di chi l’ha originata.

Per ora siamo a questo punto: abbiamo una metrica che risolve le equazioni di Einstein per uno spazio-tempo statico e a simmetria sferica; sappiamo che questa descrive correttamente la situazione fisica intorno a una stella (per es. il Sole, come mostrano la precessione del perielio dei pianeti e la deflessione gravitazionale della luce, nonché altre prove sperimentali scoperte in seguito e di cui non parlerò per brevità). Ma nella forma data da Hilbert e ormai universalmente adottata, la metrica ha una singolarità, di cui a prima vista non si comprende origine e significato. Ecco il giallo cui avevo alluso in precedenza: c’è (forse) un delitto (la singolarità); c’è (forse) un colpevole (Schwarzschild? Hilbert?) e bisogna indagare, capire se si tratti di qualcosa di “virtuale,” ossia di un’elucubrazione matematica, priva di significato e di conseguenze fisiche, oppure se qualcosa nel mondo reale corrisponda a una proprietà “scandalosa” della metrica.

A quest’indagine si dedicò nei decenni seguenti l’ingegno di fisici e matematici, nei diversi ruoli di investigatori, di magistrati dell’accusa, di avvocati della difesa; e gradatamente si arrivò a chiarire alcuni fatti, a stabilire dove cercare le prove. . . Posso chiudere per ora il racconto anticipando che nonostante molti punti siano stati chiariti, ancor oggi il giallo non è stato definitivamente risolto.