CAPITOLO 2

I postulati interpretativi

Chiameremo *preparazione* di uno stato l'insieme delle operazioni fisiche con le quali un sistema fisico viene posto in quello stato. Assumeremo che ogni stato possa essere preparato con opportune procedure sperimentali. In generale la preparazione si riferisce *a un certo istante*: non è detto che il sistema permanga in quello stato al passare del tempo. Il problema dell'*evoluzione temporale* degli stati verrà trattato più avanti.

Sul sistema è poi possibile eseguire *misure* del genere più diverso (avremo occasione di vedere esempi). Poiché una misura fornisce sempre un risultato (un numero reale), assumeremo che si tratti sempre della *misura di una qualche oss.* e che *tutte le oss. possano essere sottoposte a misura.*

Un primo postulato interpretativo asserisce:

1. *I possibili risultati della misura di un'osservabile sono i suoi autovalori.*

Un secondo postulato è il seguente:

2. *Se il sistema si trova nello stato $|A'\rangle$, autostato dell'oss. A per l'autovalore A', la misura di A fornirà con certezza il risultato A'.*

Nota: Va da sé che in questo genere di trattazione trascuriamo del tutto l'esistenza di errori di misura, ovvero assumiamo che possano essere ridotti piccoli a piacere. La questione non è affatto banale nel caso di oss. con *autovalori continui*, che almeno per ora non vogliamo prendere in esame.

Che cosa accade se il sistema è in uno stato che non è autostato di A, ed eseguiamo una misura di A? Risponde un ulteriore postulato:

3. *Se $|x\rangle$ non è autostato di A, una misura di A può fornire come risultato uno qualsiasi degli autovalori di A.*

Il risultato della misura è *intrinsecamente indeterminato*, nel senso che se si ripete la misura più volte sul sistema preparato sempre nello stesso stato, si ottengono in generale risultati diversi.

Nota: È evidente che siamo di fronte al più caratteristico postulato della m.q.: quello che afferma l'indeterminismo intrinseco della teoria. Come vedremo, si tratta di un indeterminismo *non epistemico*, ossia non derivante solo da insufficiente informazione dello sperimentatore. Nessuna meraviglia se questo punto è stato al centro di gran parte delle discussioni sull'interpretazione della m.q.

L'asserzione del postulato 3 è precisata dal seguente:

4. *Sia $|k\rangle$ una base di autovettori di A, per gli autovalori $A^{(k)}$. Sia poi*

$$|x\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$$

lo sviluppo di $|x\rangle$ nella base $|k\rangle$. Allora la misura di A sullo stato $|x\rangle$, ripetuta più volte, fornirà il valore $A^{(k)}$ con probabilità $|c_k|^2$.

Nota 1: Si ricordi che per la (1–5) $\sum |c_k|^2 = 1$; perciò l'interpretazione come probabilità è lecita, in quanto gli eventi corrispondenti ai diversi risultati della misura sono mutuamente esclusivi mentre la loro unione dà l'intero universo degli eventi.

Nota 2: Se al posto di $|x\rangle$ usiamo un altro vettore dello stesso raggio unitario, tutti i c_k vengono moltiplicati per un fattore di fase, ma i loro moduli restano invariati. Perciò le probabilità *dipendono solo dallo stato*, come è giusto.

Nota 3: Non è escluso che A abbia autovalori degeneri, ossia che alcuni degli $A^{(k)}$ coincidano. In tal caso la probabilità del risultato $A^{(k)}$ è la somma dei corrispondenti $|c_k|^2$.

Si può dare, come conseguenza di questi postulati, un'interessante interpretazione dell'espressione $\langle x|A|x\rangle$. Calcoliamo infatti

$$\langle x|A|x\rangle = \sum_k c_k \, \langle x|A|k\rangle = \sum_k c_k \, A^{(k)} \, \langle x|k\rangle = \sum_k |c_k|^2 \, A^{(k)}$$

e l'ultima espressione scritta è il valor medio dei risultati delle misure. Otteniamo quindi che se si ripete la misura di A sullo stato $|x\rangle$, la media dei risultati vale $\langle x|A|x\rangle$. Per questa ragione useremo sempre, per $\langle x|A|x\rangle$, il nome *valore medio di A sullo stato $|x\rangle$.*

Nota: Abbiamo scritto "sullo stato," e non "sul vettore," perché $\langle x|A|x\rangle$ rimane invariato se si moltiplica $|x\rangle$ per un fattore di fase. È quindi determinato dallo stato.

La riduzione del pacchetto

Per esaurire la lista dei postulati interpretativi ne manca ancora uno, che risponde alla domanda: che cosa accade allo stato quando si esegue una misura? Nella fisica classica un problema del genere non si pone, perché si dà per scontato che un'operazione di misura non alteri apprezzabilmente lo stato del sistema; o meglio, che si possa organizzare la misura in modo da rendere tale alterazione piccola quanto si vuole. Il comportamento dei sistemi quantistici mostra però che questo non è possibile: un'operazione di misura perturba necessariamente il sistema, e ne altera lo stato. Ecco il postulato:

5. *Se si esegue sullo stato $|x\rangle$ una misura dell'osservabile A, che porta al risultato $A^{(k)}$, immediatamente dopo la misura il sistema si trova nell'autostato $|k\rangle$ di A.*

Nota: Si deve dire "immediatamente dopo," perché in genere lo stato cambierà nel tempo.

Questo postulato è un altro punto cruciale della m.q., per ragioni che vedremo meglio in seguito; anch'esso è stato oggetto di molte ricerche e discussioni.

Ha anche un suo proprio nome: si chiama "postulato della riduzione del pacchetto d'onda." Non possiamo ora spiegare completamente il nome, ma possiamo motivare il termine "riduzione": si vuole indicare che lo stato iniziale, che poteva esser qualsiasi, e quindi non essere autostato di A, ma una generica sovrapposizione (v. dopo) di questi, viene ridotto, per effetto della misura, ad essere autostato.

In realtà il postulato di riduzione, nella formulazione appena scritta, non è sufficientemente generale, in quanto non dice che cosa accade quando un autovalore è degenere. Infatti in tal caso l'autostato di cui parla il postulato non è unico. Occorre quindi precisarlo come segue:

5′. *Se l'autovalore $A^{(k)}$ è degenere, lo stato dopo la misura è la proiezione ortogonale normalizzata di $|x\rangle$ nel s.s. appartenente ad $A^{(k)}$.*

Chiaramente **5′** include **5** come caso particolare, per cui possiamo riassumerli entrambi in

5″. *Se si esegue sullo stato $|x\rangle$ una misura dell'osservabile A, che porta al risultato $A^{(k)}$, immediatamente dopo la misura il sistema si trova nell'autostato proiezione ortogonale di $|x\rangle$ nel s.s. appartenente ad $A^{(k)}$.*

È importante un caso particolare: *se $|x\rangle$ è autostato di A*, non solo la misura fornisce con certezza il corrispondente autovalore, ma *lo stato non viene influenzato dalla misura.* Infatti $|x\rangle$ coincide con la sua proiezione.

Il principio di sovrapposizione

La connessione tra gli stati fisici di un sistema e i raggi unitari di uno spazio di Hilbert differenzia profondamente la m.q. dalla fisica classica. Dati due stati $|u\rangle$, $|v\rangle$ ha senso eseguire una loro combinazione lineare, con coefficienti complessi qualsiasi:

$$|w\rangle = \alpha\,|u\rangle + \beta\,|v\rangle$$

(a rigore, se $|u\rangle$, $|v\rangle$ sono unitari, e se vogliamo che anche $|w\rangle$ lo sia, α e β dovranno soddisfare una condizione; ma questo ora non ha importanza). Il nuovo stato $|w\rangle$ è diverso da ciascuno dei due di partenza, e si dice che ne è *sovrapposizione.* Il concetto di sovrapposizione è la novità della m.q.: non ha infatti alcun corrispettivo in fisica classica.

Per rendersene conto, consideriamo un caso particolare: quello in cui $|u\rangle$, $|v\rangle$ sono autostati di una stessa oss. A, con autovalori diversi: $|u\rangle = |A'\rangle$, $|v\rangle = |A''\rangle$, $A' \neq A''$. È allora facile verificare che $|w\rangle$ *non è autostato di A*, e che una misura di A potrà fornire i due valori A', A'', con certe probabilità. In questo senso $|w\rangle$ appare essere una specie di "miscela" dei due autostati. Si noti però che solo i risultati A' e A'' sono possibili, e nessun altro: neppure un qualche valore intermedio fra i due. L'esistenza di una sovrapposizione si manifesta solo col fatto che il risultato non è più certo, ma si distribuisce fra due possibili, con date probabilità.

Ma può anche accadere l'opposto: che né $|u\rangle$ né $|v\rangle$ siano autostati di A, mentre $|w\rangle$ lo è. Può dunque capitare che la misura non dia risultato certo né su $|u\rangle$ né su $|v\rangle$, mentre ciò accade se si fa la misura sullo stato $|w\rangle$. Quindi una sovrapposizione non agisce sempre nel senso di accrescere l'incertezza del risultato di una misura, e questo di nuovo esce da qualsiasi schema classico.

È anche possibile che cambiando i coefficienti α, β si ottengano autostati di A con diversi autovalori. Qui entra in modo essenziale, come vedremo, che i coefficienti sono complessi. Anche da questo punto di vista la sovrapposizione è un fatto fisico totalmente nuovo: sia per la necessità di far posto ai numeri complessi nella teoria, sia per la varietà di comportamenti cui una sovrapposizione può dar luogo.

L'evoluzione temporale

Per concludere questo veloce sommario sugli elementi di base della m.q., dobbiamo parlare del modo come evolve nel tempo lo stato di un sistema. Finora il tempo non è (quasi) intervenuto nel discorso; ora dovremo tener presente che in generale lo stato di un sistema cambia nel tempo, e converrà mostrare esplicitamente questo fatto, introducendo la variabile t fra i simboli che caratterizzano lo stato. Così $|t\rangle$ indicherà un generico stato con la sua variazione nel tempo: potremo supporre ad es. che esso sia stato preparato al tempo t_0 come $|t_0\rangle$ e poi lasciato evolvere indisturbato.

La forma più semplice per la legge di evoluzione temporale di uno stato è l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \, \frac{d}{dt}|t\rangle = H\,|t\rangle. \tag{2–1}$$

La (2–1) è un'eq. differenziale di primo ordine; quindi la soluzione sarà determinata assegnando la condizione iniziale $|t_0\rangle$. A secondo membro compare l'op. a.a. H, detto *hamiltoniana* del sistema. Come si vede, la conoscenza di H è tutto ciò che occorre e basta per determinare l'evoluzione temporale. Si noti che la (2–1) è omogenea nella funzione incognita $|t\rangle$: ciò significa che *una sovrapposizione si conserva nel tempo*: se $|t_0\rangle = \alpha\,|a,t_0\rangle + \beta\,|b,t_0\rangle$, è anche, per ogni t:

$$|t\rangle = \alpha\,|a,t\rangle + \beta\,|b,t\rangle. \tag{2–2}$$

L'applicazione

$$T(t,t_0):\ \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ \ |x,t_0\rangle \mapsto |x,t\rangle$$

è lineare, come indica la (2–2); si dimostra inoltre che si tratta di un *isomorfismo isometrico*, ossia che è invertibile e conserva i prodotti scalari. Un isomorfismo isometrico si chiama anche *op. unitario.* Abbiamo dunque che lo stato al tempo t_0, $|x,t_0\rangle$, e quello al tempo t, $|x,t\rangle$ sono connessi da

$$|x,t\rangle = T(t,t_0)\,|x,t_0\rangle \tag{2–3}$$

con $T(t,t_0)$ unitario.

Derivando la (2–3) rispetto a t e confrontando con la (2–1), arriviamo a

$$i\hbar \frac{d}{dt} T(t, t_0) = H\, T(t, t_0). \tag{2–4}$$

È poi facile dedurre dalla (2–3) una *legge di composizione per* T:

$$T(t_2, t_0) = T(t_2, t_1) T(t_1, t_0).$$

Stati stazionari, costanti del moto

Occorre notare che in tutte le eq. scritte fin qui non abbiamo detto esplicitamente se l'op. hamiltoniano dipende o no dal tempo. La ragione è che entrambi i casi sono possibili e possono avere interesse per noi. Se H non dipende dal tempo (cosa che accade ad es. per un sistema *isolato*) ci sono alcune semplificazioni e proprietà particolari che dovremo mettere in rilievo; faremo perciò questa ipotesi, fino a diverso avviso.

La prima proprietà è l'*invarianza per traslazioni temporali.* Questo vuol dire che l'evoluzione a partire da un certo stato iniziale dipende solo dal tempo trascorso, e non dall'esatto istante iniziale. In altre parole, l'op. T non dipende separatamente dai due argomenti, ma solo dalla differenza:

$$T(t, t_0) = T(t - t_0). \tag{2–5}$$

Una seconda proprietà si trova facendo l'ipotesi che lo stato iniziale sia un autostato $|E\rangle$ di H. Allora la (2–1) ha l'integrale

$$|E, t\rangle = e^{-iEt/\hbar} |E, 0\rangle \tag{2–6}$$

come si verifica direttamente. La (2–6) mostra che *un autostato di* H *rimane inalterato nel tempo*: infatti il corrispondente vettore viene moltiplicato per un fattore di fase. Per questa ragione gli autostati di H si chiamano *stati stazionari*, e hanno un ruolo importante in tutta la teoria.

Nota 1: Si noti che abbiamo indicato con E un autovalore di H, facendo eccezione alla regola che avevamo data. La ragione apparirà più avanti.

Nota 2: Invece uno stato che sia sovrapposizione di due (o più) autostati di H con autovalori diversi cambia nel tempo, perché il fattore di fase nella (2–6) è diverso per i due autovettori.

Dato che H è a.a., e ha quindi una base di autovettori, ogni vettore può essere sviluppato come combinazione lineare di autovettori di H:

$$|x, 0\rangle = \sum_k c_k \, |E_k\rangle$$

e perciò, usando la (2–6) per ciascun termine a secondo membro:

$$|x,t\rangle = \sum_k c_k\, e^{-iE_k t/\hbar} |E_k\rangle. \tag{2–7}$$

La (2–7) mostra come si risolve in generale l'eq. di Schrödinger se si conoscono gli stati stazionari.

Conseguenza ovvia, ma importante in sé, dell'esistenza degli stati stazionari è la seguente: *il valor medio di qualsiasi oss. su uno stato stazionario non cambia nel tempo.* Non è difficile verificare che vale in realtà una proprietà più forte: *se si ripete a tempi diversi la misura di una data oss. su uno stato stazionario, tutte le probabilità dei diversi risultati non dipendono dal tempo.*

È bene però chiarire l'esatto significato di quanto appena detto. Abbiamo preparato, a un tempo t_0, uno stato stazionario. A un tempo successivo qualsiasi eseguiamo la misura di un'oss. A qualsiasi. Le probabilità dei risultati non dipendono dal tempo trascorso fra la preparazione e la misura.

Va da sé che se lo stato non è stazionario, le probabilità e i valori medi per una generica oss. cambiano nel tempo. Ci si può chiedere se non esistano particolari oss. per cui questo non accade; più esattamente, se vi siano oss. tali che le probabilità (e quindi il valor medio) *su qualunque stato* non dipendono dal tempo. È ragionevole chiamare una tale oss. *costante del moto.* Dimostriamo che *le costanti del moto sono tutte e sole le oss. che commutano con H.*

Dim.: Sia

$$|x,t\rangle = \sum_k |k\rangle\langle k|x,t\rangle$$

lo sviluppo del generico stato nella base degli autovettori di A. Allora

$$\begin{aligned}
i\hbar\,\frac{d}{dt}|\langle k|x,t\rangle|^2 &= i\hbar\,\frac{d}{dt}\left(\langle x,t|k\rangle\langle k|x,t\rangle\right)\\
&= i\hbar\,\frac{d}{dt}\langle x,t|k\rangle\,\langle k|x,t\rangle + i\hbar\,\langle x,t|k\rangle\,\frac{d}{dt}\langle k|x,t\rangle\\
&= -\langle x,t|H|k\rangle\,\langle k|x,t\rangle + \langle x,t|k\rangle\,\langle k|H|x,t\rangle\\
&= -\langle x,t|\,HP_k\,|x,t\rangle + \langle x,t|\,P_kH\,|x,t\rangle = \langle x,t|\,[P_k,H]\,|x,t\rangle.
\end{aligned}$$

Se le probabilità sono costanti, il valor medio di $[P_k,H]$ su qualsiasi stato si annulla. Questo richiede che si annulli $[P_k,H]$ (la cosa non è ovvia, e tralasciamo la dimostrazione). Allora la (1–8) mostra che anche $[A,H]=0$.

Viceversa, se $[A,H]=0$ l'oss. A ha una base di autovettori comuni con H: usiamo questi, che sono stati stazionari, ed è ovvio che ogni $|\langle k|x,t\rangle|^2$ è costante. ■

Evoluzione del valor medio e degli elementi di matrice

Per una generica oss., e per un generico stato, le probabilità e il valor medio variano nel tempo. È interessante che si possa dare un'espressione semplice di questa variazione del valor medio.

Calcoliamo infatti

$$\begin{aligned} i\hbar\,\frac{d}{dt}\langle x,t|A|x,t\rangle &= i\hbar\,\frac{d}{dt}\langle x,t|\cdot A|x,t\rangle + i\hbar\,\langle x,t|A\cdot i\hbar\frac{d}{dt}|x,t\rangle \\ &= -\langle x,t|\,HA\,|x,t\rangle + \langle x,t|\,AH\,|x,t\rangle \\ &= \langle x,t|\,[A,H]\,|x,t\rangle. \end{aligned} \tag{2–8}$$

Come vedremo fra poco, la (2–8) è la base della corrispondenza fra m. classica e m.q.

È anche utile dare la variazione nel tempo degli elementi di matrice di un'oss., presi fra stati stazionari. Basta usare la (2–6):

$$\langle E_1,t|\,A\,|E_2,t\rangle = \langle E_1,0|\,A\,|E_2,0\rangle\,e^{i\,(E_1-E_2)t/\hbar}.$$

Come si vede, un elemento di matrice dipende periodicamente dal tempo, con frequenza

$$\nu_{12} = \frac{|E_1-E_2|}{h}. \tag{2–9}$$

Non è un caso se si ritrova la regola di Bohr per la frequenza dei fotoni emessi o assorbiti in una transizione atomica: la forma (2–1) per l'evoluzione temporale è motivata proprio dalla necessità di giustificare la (2–9).

Il principio di corrispondenza

Non abbiamo finora affrontato un problema cruciale: come si determina la forma matematica delle oss.? Per ora sappiamo solo che a ogni oss. corrisponde un op. a.a., ma questo non è certo sufficiente: abbiamo bisogno di sapere quale, fra gli infiniti op. a.a. definibili su $\mathcal{H}$, rappresenterà la quantità di moto o la posizione di una particella, quale l'energia di un atomo e quale (quali) il suo momento angolare, ecc.

Per comprendere la risposta, occorre tener presente che ciò che veramente conta sono le relazioni che sussistono fra tali oss., come ad es. la nota formula

$$E = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}\,kx^2 \tag{2–10}$$

per l'energia di un oscillatore armonico in funzione della sua posizione x e quantità di moto p.

Il principio guida è il seguente: dato che la m. classica dovrà essere un caso limite della m.q., cercheremo — ovunque possibile — di salvare la validità delle relazioni note dalla m. classica, come la (2–10).

La m. classica, nella sua forma hamiltoniana, ci fornisce inoltre una serie di relazioni particolari, note come *parentesi di Poisson*: per es. fra x e p dell'o.a. vale

$$\{x, p\} = 1. \tag{2–11}$$

Relazioni come la (2–11) si estendono a sistemi hamiltoniani qualsiasi, con qualunque numero di gradi di libertà: si ha infatti sempre

$$\{q_i, q_j\} = 0 \qquad \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{2–12}$$

Si sa poi che per qualunque grandezza A vale l'eq. del moto

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}. \tag{2–13}$$

Confrontiamo ora la (2–13) con la (2–8): è evidente l'analogia formale, se si assume che il valor medio di un'oss. quantistica sia ciò che al limite classico si traduce nel valore *tout court* della corrispondente grandezza classica. L'analogia si precisa come segue: c'è una corrispondenza fra parentesi di Poisson classica e commutatore quantistico, nella forma

$$[A, B] \leftrightarrow i\hbar\,\{A, B\}. \tag{2–14}$$

Possiamo ora enunciare il *principio di corrispondenza* come segue:
Assumiamo che le oss. quantistiche soddisfino tra loro, ove possibile, le stesse relazioni algebriche delle corrispondenti grandezze classiche; in particolare imponiamo le relazioni di commutazione che derivano da (2–12) *e* (2–14):

$$[q_i, q_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [q_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}.$$

La clausola "ove possibile" è necessaria perché esistono oss. quantistiche che *non hanno analogo classico*: l'esempio più comune è lo spin. In questi casi le relazioni algebriche debbono essere indotte per altra via.

Osservabili compatibili

I postulati interpretativi ci dicono che cosa aspettarsi quando si esegue la misura di un'oss. In fisica classica però è possibile misurare insieme due o più grandezze, ed è perciò naturale chiedersi come si presenta la situazione secondo la m.q. Cominciamo col rispondere a una domanda connessa: dato uno stato $|x\rangle$ e due oss. A, B, in quali casi la probabilità congiunta delle misure di A e di B non dipende dall'ordine?

Esaminiamo la questione in generale. Siano $A^{(k)}$, $B^{(l)}$ gli autovalori risp. di A e di B; siano poi P_k, Q_l i rispettivi proiettori. Sappiamo che

$$\sum_k P_k = \sum_l Q_l = I.$$

Se la misura di A ha fornito il risultato $A^{(k)}$, lo stato è diventato $|x'\rangle = a\,P_k\,|x\rangle$, dove a è un opportuno fattore di normalizzazione. La probabilità di questo risultato è $p_k = \langle x|\,P_k\,|x\rangle$, e si vede che possiamo prendere $a = p_k^{-1/2}$.

Eseguiamo ora la misura di B: otterremo un risultato $B^{(l)}$, e lo stato finale diverrà $|x''\rangle = b\,Q_l\,|x'\rangle$, con b nuovo fattore di normalizzazione; la probabilità di questo risultato è $q_{kl} = \langle x'|\,Q_l\,|x'\rangle$ e si può prendere $b = q_{kl}^{-1/2}$. (Si noti che occorre scrivere q_{kl}, perché la probabilità in questione dipende dallo stato $|x'\rangle$, che a sua volta dipende dal risultato della misura di A.)

Possiamo definire la probabilità congiunta r_{kl} dei due eventi

$$(\text{ris. della misura di } A = A^{(k)}) \qquad \text{e} \qquad (\text{ris. della misura di } B = B^{(l)})$$

e avremo

$$r_{kl} = p_k q_{kl} = a^{-2}\langle x'|\,Q_l\,|x'\rangle = \langle x|\,P_k Q_l P_k\,|x\rangle.$$

Se procediamo all'inverso, ossia misurando prima B e poi A, avremo simmetricamente, per la probabilità s_{kl} di ottenere prima il valore $B^{(l)}$ per B, e poi $A^{(k)}$ per A:

$$s_{kl} = \langle x|\,Q_l P_k Q_l\,|x\rangle.$$

Se vogliamo che sia sempre $r_{kl} = s_{kl}$ dovremo imporre

$$P_k Q_l P_k = Q_l P_k Q_l.$$

Sommando su l, e ricordando che P_k è idempotente:

$$P_k = \sum_l Q_l P_k Q_l. \tag{2–15}$$

Moltiplicando la (2–15) a destra per Q_m:

$$P_k Q_m = Q_m P_k Q_m$$

(si ricordi che $Q_l Q_m = \delta_{lm}$) mentre moltiplicando a sinistra:

$$Q_m P_k = Q_m P_k Q_m.$$

Abbiamo dunque dimostrato che P_k e Q_m commutano. Da qui, usando la (1–8) segue subito $[A,B] = 0$: le due oss. debbono commutare.

È facile vedere che l'argomento si può invertire, e abbiamo quindi dimostrato che *condizione nec. e suff. perché la probabilità congiunta dei risultati delle misure di due oss. sia indipendente dall'ordine, è che le oss. commutino.*

Se questo accade, l'ordine in cui si eseguono le misure non conta; il che vuol dire che l'operazione di misura dell'una non influenza la misura dell'altra (come accade sempre in fisica classica). Si dice allora che le oss. sono *compatibili.* Dunque:

Due osservabili sono compatibili se e solo se commutano.

Nel caso opposto, di oss. non compatibili, le probabilità r_{kl} e s_{kl} sono in generale diverse, e si possono presentare i casi più vari. Esempio: supponiamo che $|x\rangle$ sia autostato di A, con l'autovalore A'. Allora le misure eseguite nell'ordine A, B danno con certezza il valore A' per A, e una distribuzione di valori per B (se $|x\rangle$ non è autostato anche di B). Viceversa, se si misura prima B si cade in uno stato che non sarà in genere autostato di A: quindi il risultato della misura di A non è più certo.