CAPITOLO 4

Le simmetrie come gruppo

Fino a questo punto abbiamo studiato una singola operazione di simmetria; tutt'al più, in un'unica occasione, abbiamo osservato che ad ogni simmetria corrisponde un'inversa. Vogliamo ora sviluppare l'argomento, studiando non più una singola simmetria, ma tutto un insieme. Vedremo che tale insieme ha necessariamente una struttura matematica ben definita, la *struttura di gruppo*, e soprattutto troveremo che lo studio globale di un gruppo di simmetrie permette di ottenere molte più informazioni di quelle ottenibili da una simmetria sola.

Tornando alla terminologia del Cap. 1, una data simmetria σ_1, presa in senso attivo, trasforma tutti gli stati del sistema:

$$\sigma_1 :\ \mathrm{S} \mapsto \mathrm{S}' = \sigma_1(\mathrm{S}).$$

Osserviamo che σ_1 è *bigettiva*: due stati distinti vengono trasformati in stati distinti, e ogni stato è possibile punto d'arrivo della trasformazione.

Se ora abbiamo una seconda simmetria σ_2 (con le stesse proprietà) possiamo applicarla a S':

$$\sigma_2 :\ \mathrm{S}' \mapsto \mathrm{S}'' = \sigma_2(\mathrm{S}').$$

Abbiamo così costruito una trasformazione σ dallo stato S allo stato S'':

$$\sigma :\ \mathrm{S} \mapsto \mathrm{S}'' = \sigma(\mathrm{S}) = \sigma_2\left(\sigma_1(\mathrm{S})\right)$$

che ci fornisce in modo naturale una *legge di composizione* delle simmetrie:

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 \circ \sigma_1 :\ \mathrm{S} \mapsto \sigma_2\left(\sigma_1(\mathrm{S})\right)$$

da leggere così: il prodotto di due simmetrie è definito come la loro *successiva applicazione* a uno stato.

Non è difficile verificare che un insieme di simmetrie, che sia *chiuso* rispetto a questo prodotto, è un gruppo. Dire che l'insieme è chiuso significa solo che prese due simmetrie dell'insieme anche il loro prodotto sta nell'insieme (non è una restrizione: si può sempre ampliare l'insieme fino a includere tutti i prodotti). L'associatività è ovvia, come pure l'esistenza dell'inversa di una simmetria. L'elemento neutro del gruppo è l'identità, ossia la trasformazione consistente nel non trasformare affatto lo stato.

Nota: Non è un caso se le simmetrie hanno la struttura di gruppo: in effetti la teoria dei gruppi è nata agli inizi dell'800 (Laplace) dallo studio delle *permutazioni*; è stata poi approfondita e sviluppata (Galois) come astrazione dallo studio di un problema matematico di simmetrie: quello delle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione algebrica. Per quella via si arrivò a dimostrare che le equazioni di grado superiore al quarto non sono generalmente risolubili per radicali.

È ben noto che esistono simmetrie che non commutano tra loro: l'esempio più comune sono le rotazioni attorno ad assi diversi. Dunque in generale un gruppo di simmetrie *non è commutativo.* Capita però spesso di aver a che fare con gruppi commutativi (detti anche *abeliani*). Ne abbiamo già incontrato uno, anche se di nascosto: le rotazioni attorno a uno stesso asse. Noi abbiamo studiato una singola rotazione, ma lasciando libero il parametro α (angolo della rotazione); il che è quanto dire che in effetti abbiamo studiato l'insieme delle rotazioni per α arbitrario, che è appunto un gruppo commutativo. Anzi, abbiamo anche fatto uso di proprietà di differenziabilità rispetto ad α, sfruttando, senza dirlo, il fatto che si tratta di un *gruppo di Lie.*

Uno dei modi più utili di caratterizzare un gruppo di simmetrie è il seguente: includere nel gruppo tutte e sole le simmetrie che *lasciano inalterato* un qualche oggetto (concreto o astratto). Potrà essere una figura geometrica, lo stato di un sistema, un insieme di stati, un'osservabile (in particolare una hamiltoniana: allora avremo un *gruppo d'invarianze*) ecc. Questo approccio consente tra l'altro d'introdurre in modo naturale molti concetti di teoria dei gruppi; è quello che faremo ora discutendo un esempio definito.

Il gruppo del cubo

Consideriamo un cubo, e chiediamoci quali rotazioni dello spazio tridimensionale in cui è immerso lo lasciano inalterato: per quanto visto sopra troveremo un gruppo, che si chiama *gruppo del cubo* (o *dell'ottaedro*) e che designeremo col simbolo O, tradizionale in cristallografia.

Nota: Col nome di "gruppo del cubo" viene indicato a volte il gruppo più esteso $\mathrm{O^h}$ che include anche le *riflessioni*; per ora noi ci limitiamo alle sole rotazioni.

Osserviamo in primo luogo che le simmetrie del cubo saranno rotazioni attorno ad assi che passano per il centro: la totalità di queste rotazioni costituisce un altro gruppo, assai importante per la fisica, il cui simbolo tradizionale è SO(3).

Spiegazione: La O sta a ricordare che le rotazioni, scritte come matrici, sono *ortogonali*; S (per "speciali") indica le matrici a determinante 1 (ossia che non invertono l'orientamento della terna cartesiana); il 3 è ovviamente il numero di dimensioni dello spazio.

Poiché O, visto come insieme di trasformazioni, è un sottoinsieme di SO(3), ed è esso stesso un gruppo rispetto alla stessa legge di composizione, diremo che O è un *sottogruppo* di SO(3). Tra i due gruppi ci sono altre importanti differenze:

- Mentre O, come vedremo subito, ha un numero finito di elementi (gruppo *finito*) SO(3) ne ha infiniti.

– Gli elementi di SO(3) possono essere descritti da un insieme di parametri reali (coordinate), per l'esattezza 3: si tratta perciò di un gruppo continuo, o meglio *topologico*, e più in particolare, ancora di un gruppo di Lie. Invece O è un gruppo *discreto* (che non vuol dire finito: esistono gruppi infiniti ma discreti); in relazione ad O i concetti topologici non sono quindi di nessuna utilità.

Classifichiamo ora gli elementi di O, al modo seguente:

a) l'identità

b) le 3 rotazioni di 180° attorno alle 3 rette che uniscono i centri di due facce opposte

c) le 6 rotazioni di 90° attorno agli stessi assi, nei due versi

d) le 6 rotazioni di 180° attorno alle 6 rette che uniscono i centri di due spigoli opposti

e) le 8 rotazioni di 120° attorno alle 4 diagonali, nei due versi.

In totale abbiamo dunque 24 elementi. Il fatto che $24 = 4!$ suggerisce che possa esistere una relazione col gruppo di permutazioni di 4 oggetti (*gruppo simmetrico* di ordine 4, indicato con S_4): in effetti è proprio così. Si verifica infatti che ciascuna rotazione di O permuta le 4 diagonali del cubo, e rotazioni distinte producono permutazioni distinte.

Ne segue che i due gruppi O e S_4 sono in sostanza lo stesso gruppo, visto in due modi diversi. Si dice che i due gruppi sono *isomorfi*, o anche che sono due diverse *realizzazioni* dello stesso gruppo *astratto*. I due concetti ora visti — gruppo astratto come struttura comune a gruppi isomorfi definiti in modo indipendente, e viceversa esistenza di diverse realizzazioni concrete di uno stesso gruppo astratto — avranno un ruolo centrale in tutto ciò che segue.

Classi di coniugazione

Nell'elencare qui sopra gli elementi del gruppo del cubo li abbiamo raccolti in 5 classi, apparentemente solo per comodità descrittiva. È però chiaro che le rotazioni di una stessa classe hanno qualcosa in comune: in primo luogo l'angolo di rotazione. Tuttavia l'angolo non è il criterio decisivo, visto che le classi *b*) e *d*) contengono entrambe rotazioni di 180°, ma sono in qualche modo diverse.

La differenza è questa: le rotazioni di una stessa classe sono attorno ad assi che possono venir trasformati l'uno dell'altro da una simmetria del cubo, quelle di classi diverse no. Più in dettaglio, indichiamo con x, y, z le tre rette perpendicolari alle coppie di facce opposte, e consideriamo ad es. la rotazione di 180° attorno all'asse z, che appartiene alla classe *b*). Possiamo ottenerla come segue:

1) portare l'asse z sull'asse x ruotando di 90° attorno ad y
2) ruotare di 180° attorno ad x
3) riportare l'asse x sull'asse z ruotando di 90° attorno ad y, in verso opposto.

In termini astratti, porremo la definizione seguente: diremo che due elementi g e g' di un gruppo $\mathcal{G}$ sono *coniugati* se esiste in $\mathcal{G}$ un h tale che $g' = h^{-1}gh$ (e di conseguenza $g = hg'h^{-1}$). Si verifica senza difficoltà che la relazione di coniugazione fra due elementi di un gruppo è una *relazione di equivalenza*, ossia è riflessiva, simmetrica e transitiva. Ne segue che si può dividere il gruppo (partizione) in classi di equivalenza, composte ciascuna di elementi tra loro coniugati. Queste si chiamano *classi di coniugazione*. È ormai chiaro che le 5 classi del gruppo del cubo sono proprio le sue classi di coniugazione.

Si vedono da questo esempio alcune proprietà che valgono in generale:

– in ogni gruppo l'elemento neutro fa classe a sé

– in un gruppo di rotazioni ogni classe di equivalenza consiste di rotazioni dello stesso angolo (ma non vale il viceversa).

Nel caso di O è anche vero che ogni rotazione è coniugata alla sua inversa, ma questo non succede sempre.

Torniamo per un momento al gruppo SO(3) di tutte le rotazioni. È facile vedere che in questo caso una classe di coniugazione comprende *tutte e sole* le rotazioni di un dato angolo: questo perché ogni asse di rotazione può essere portato a coincidere con qualunque altro con un'opportuna rotazione. Dunque le classi di coniugazione di SO(3) sono parametrizzate dall'angolo di rotazione (fra 0 e π, in quanto una rotazione di angolo $\alpha > \pi$ è la stessa cosa che una rotazione di $2\pi - \alpha$ in verso opposto, ossia attorno all'asse orientato in senso contrario).

Sottogruppi

Abbiamo già detto che O è un sottogruppo di SO(3), e abbiamo dato in quell'occasione la definizione di sottogruppo. Dobbiamo aspettarci che O abbia a sua volta dei sottogruppi: lo sono ad es. le rotazioni intorno a uno stesso asse, perché componendole si ottiene sempre un'altra rotazione intorno a quell'asse. Se guardiamo poi per es. le rotazioni attorno all'asse z, vediamo che se ne ricavano in realtà due diversi sottogruppi:

– quello che le comprende tutte (due di 90° e una di 180°): lo chiameremo C_4^z

– quello che consiste della sola rotazione di 180°: C_2^z

(ovviamente in entrambi i casi occorre includere l'identità, che è sempre presente in ogni s.g.: anzi essa forma anche s.g. a sé, per banale che sia). La notazione usata è quella cristallografica, detta anche notazione di Schönflies.

Osserviamo poi che C_2^z è anche s.g. di C_4^z, il che costituisce un esempio di una situazione generale: la relazione di s.g., che denoteremo $\mathcal{G}_1 \le \mathcal{G}_2$, è *transitiva*, ed è anche *riflessiva* e *antisimmetrica* (se $\mathcal{G}_1 \le \mathcal{G}_2$ può essere anche $\mathcal{G}_2 \le \mathcal{G}_1$ solo se $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$). Brevemente: è una relazione di *ordine parziale* (parziale, perché due s.g. di uno stesso gruppo non sono necessariamente uno s.g. dell'altro: es. C_4^x e C_4^z).

Ma c'è di più:

1. Comunque presi $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ esiste sempre un $\mathcal{G}_3$ con le proprietà:
   - $\mathcal{G}_3 \le \mathcal{G}_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_3 \le \mathcal{G}_2$
   - $(\mathcal{H} \le \mathcal{G}_1) \wedge (\mathcal{H} \le \mathcal{G}_2) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \le \mathcal{G}_3$.

In parole: ogni s.g. comune di $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ è anche s.g. di $\mathcal{G}_3$. Lo indicheremo con $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$, e si verifica che esso è l'intersezione insiemistica di $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.

2. Esiste sempre anche un $\mathcal{G}_4$ tale che
   - $\mathcal{G}_1 \le \mathcal{G}_4 \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_2 \le \mathcal{G}_4$
   - $(\mathcal{G}_1 \le \mathcal{H}) \wedge (\mathcal{G}_2 \le \mathcal{H}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_4 \le \mathcal{H}$

cioè $\mathcal{G}_4$ è s.g. di ogni $\mathcal{H}$ che abbia tanto $\mathcal{G}_1$ quanto $\mathcal{G}_2$ come s.g. Questo viene indicato con $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$, ma *non è* l'unione di $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, bensì l'insieme di tutti i prodotti.

3. Esiste un s.g. comune a tutti i s.g. di $\mathcal{G}$ (è quello costituito dal solo elemento neutro) e uno che li ha tutti come s.g. (è lo stesso $\mathcal{G}$).

Tutte queste proprietà si riassumono dicendo che l'insieme dei s.g. di un gruppo è un *reticolo* (inglese "lattice") rispetto alla relazione di ordine $\le$.

La figura a pag. seguente riassume la struttura del reticolo dei s.g. di O. Occorrono solo alcune precisazioni:

1. T è il *gruppo del tetraedro*, consistente dei 12 elementi delle classi a), b) ed e).
2. V (dal tedesco "Vierergruppe") è il gruppo di simmetria di un rettangolo. Come s.g. di O comprende le rotazioni di 180° attorno agli assi x, y, z.
3. C_3 consiste delle sole rotazioni di 120° attorno a una delle diagonali del cubo.
4. D_3 è il gruppo di simmetria del triangolo equilatero, e consiste di 6 elementi (è isomorfo a S_3). Come s.g. di O contiene, oltre a C_3, tre rotazioni di 180° con assi perpendicolari alla diagonale.
5. D_4 è il gruppo di simmetria del quadrato, e consiste di 8 elementi. Come s.g. di O contiene, oltre a C_4, anche 4 rotazioni di 180° con assi perpendicolari a quello di C_4.
6. C_1 indica ovviamente il s.g. formato dalla sola identità.
7. I moltiplicatori (come ad es. in $3D_4$) stanno a indicare che quel s.g. compare in più copie "equivalenti" (v. appresso).
8. Gli apici, in V' e in C_2' indicano che si tratta di s.g. isomorfi a V e a C_2 rispettivamente, ma non equivalenti.

Esercizio: Quali s.g. di O sono commutativi?

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{O} \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
 & 3\mathrm{D}_4 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathrm{T} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
3\mathrm{V}' \arrow[d] & 3\mathrm{C}_4 \arrow[d] & \mathrm{V} \arrow[dl] & 4\mathrm{D}_3 \arrow[dl] \\
6\mathrm{C}_2' \arrow[dr] & 3\mathrm{C}_2 \arrow[d] & 4\mathrm{C}_3 \arrow[dl] & \\
 & \mathrm{C}_1 & &
\end{tikzcd}
$$

Come O è stato caratterizzato dall'essere il (massimo) gruppo di simmetria del cubo, lo stesso si può fare per ciascun s.g. Abbiamo già detto ad es. che T lascia fisso un tetraedro (in effetti uno qualunque dei due tetraedri inscrivibili nel cubo); allo stesso modo ogni s.g. di O è gruppo di simmetria di una figura *meno simmetrica* del cubo, e l'ordinamento dei s.g. si riflette in un ordinamento di figure geometriche rispetto alla loro simmetria. Per es. D_4 è il gruppo di simmetria di un prisma a base quadrata, C_4 di una piramide, ecc.

Si può anche vedere la cosa in altro modo, di maggior interesse fisico. Supponiamo di "rompere" la simmetria del cubo: colorando in modo diverso alcune facce, oppure deformando il cubo stesso, o introducendo una qualche disomogeneità (di composizione, di temperatura, ecc.). Se per es. allunghiamo il cubo lungo l'asse z, trasformandolo in un prisma a base quadrata, esso perderà parte della sua simmetria: il gruppo si ridurrà da O a D_4^z. Se invece coloriamo di rosso le tre facce che concorrono in un vertice, e di verde quelle che concorrono nel vertice opposto, la simmetria scenderà a uno dei C_3, e così via.

Vedremo più avanti come quest'idea della gerarchia dei s.g. come progressiva rottura della simmetria trovi un corrispondente, in meccanica quantistica, nella risoluzione di degenerazioni dovuta a perturbazioni che riducono la simmetria di un sistema.

Concludiamo questo argomento ricordando una proprietà dei gruppi finiti. Il numero di elementi di un gruppo finito $\mathcal{G}$ si chiama *ordine* del gruppo, e lo indicheremo con $\operatorname{ord}\mathcal{G}$. Vale il teorema: *se* $\mathcal{G}_1 \le \mathcal{G}$, *allora* $\operatorname{ord}\mathcal{G}_1$ *è un divisore di* $\operatorname{ord}\mathcal{G}$.

Sottogruppi invarianti

Abbiamo visto che nel diagramma qui sopra alcuni s.g. si presentano in più copie, che abbiamo chiamato "equivalenti." Ciò vuol dire che tali s.g. sono tra loro *coniugati*, nello stesso senso in cui si parla di elementi coniugati: diciamo che $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, s.g. di $\mathcal{G}$, sono coniugati, se esiste in $\mathcal{G}$ un elemento h tale che $h^{-1}\mathcal{G}_1 h = \mathcal{G}_2$ (l'eguaglianza va intesa nel senso degli insiemi). È facile vedere che s.g. coniugati sono tra loro *isomorfi*: non solo essi sono in corrispondenza biunivoca, ma la corrispondenza conserva la legge di composizione.

Osservazione: Prendendo per h l'elemento neutro, si vede che un s.g. è coniugato a se stesso. Si noti però che $\mathcal{G}_2$ può coincidere con $\mathcal{G}_1$ anche se h non è l'elemento neutro: basta che la trasformazione (coniugazione) prodotta da h "rimescoli" gli elementi di $\mathcal{G}_1$ tra loro.

Nel caso di O l'esistenza di s.g. coniugati è ovvia: per esempio i tre s.g. D_4^x, D_4^y, D_4^z differiscono solo per l'asse di rotazione, ma in O esiste una rotazione che manda l'asse x nell'asse y, ecc. Viceversa i C_2 e i C_2' non sono coniugati, perché i primi consistono di rotazioni di 180° attorno agli assi x, o y, o z; invece i secondi sono rotazioni (ancora di 180°) attorno alle rette che congiungono i punti medi di spigoli opposti. Ora non esiste in O alcuna rotazione che mandi un asse del primo tipo a sovrapporsi a un asse del secondo tipo.

Continuando a esaminare il diagramma si scopre che esistono alcuni s.g. "senza moltiplicatore," ossia che non hanno copie coniugate: a parte i casi banali (C_1 e O) sono in tale situazione T e V. Come può accadere questo? Stante l'osservazione fatta poco sopra, c'è una sola soluzione: che comunque si scelga h risulti sempre $h^{-1}\mathrm{T}\,h = \mathrm{T}$, e lo stesso per V. In tal caso il s.g. è invariante per coniugazione (brevemente, *invariante*). Abbiamo così scoperto che O possiede due s.g. invarianti.

Dalla definizione si vede che un s.g.i. è necessariamente l'unione di classi di coniugazione, perché se contiene un elemento contiene tutti i coniugati. Naturalmente non è vero il viceversa: l'unione di più classi di coniugazione non è sempre un s.g.i., perché non è neppure detto che sia un s.g.

Esercizio: Verificare questo fatto nel caso di O.

Però se l'unione di classi di coniugazione *forma un s.g.*, allora si tratta certamente di un s.g.i.

Osservazione: È facile capire che V è s.g.i. non solo di O, ma anche di T. Non è vero il viceversa: ad es. i tre C_2 sono s.g.i. di V, ma non di T e tanto meno di O (verificare!). Dunque la relazione di s.g.i. *non è transitiva.* La ragione è che se $\mathcal{G}_1 \le \mathcal{G}_2 \le \mathcal{G}$ può benissimo darsi che sia $h^{-1}\mathcal{G}_1 h = \mathcal{G}_1$ per tutti gli $h \in \mathcal{G}_2$, ma non per tutti gli $h \in \mathcal{G}$, che sono di più.

Proviamo ora a cercare i s.g.i. di SO(3). Consideriamo una generica classe di coniugazione, che sappiamo contenere tutte le rotazioni di un dato angolo α. Componendo due di queste, si ottiene una rotazione di angolo compreso fra 0 e 2α, a seconda dell'angolo esistente fra i loro assi; perciò se si prende in particolare $\alpha = \pi/2$, si arriva al seguente risultato: qualsiasi rotazione può essere ottenuta componendo due rotazioni di 90°. Conseguenza immediata: *il gruppo*

SO(3) *non ha s.g.i.* (tranne quelli banali: il gruppo stesso e l'identità). Un gruppo privo di s.g.i. non banali si dice *semplice*.

Sottogruppi invarianti e omomorfismi

Vediamo ora un'interpretazione del concetto di s.g.i., che ci darà anche ragione della sua importanza. Ragionando su di un esempio, supponiamo di aver colorato le 6 facce del cubo con 3 colori diversi, in modo che facce opposte abbiano lo stesso colore. Le rotazioni che lasciano invariato il cubo colorato sono quelle del s.g. V.

Ma possiamo anche ragionare così: supponiamo *indistinguibili* due posizioni del cubo che mostrano la stessa colorazione (ossia quelle ottenibili l'una dall'altra per mezzo di V). In tal caso le operazioni di simmetria *distinguibili* sono soltanto quelle che scambiano in modo diverso i colori, e sono ovviamente 6. Il cubo colorato non è invariante per tali simmetrie, ma lo è il cubo *a meno del colore*. Il gruppo di simmetria così costruito, che chiameremo provvisoriamente $\tilde{\mathrm{O}}$, in che relazione sta con O e con V?

L'ipotesi d'indistinguibilità che abbiamo fatta si traduce nel dire che due simmetrie di O non contano come distinte se differiscono solo per una simmetria di V: $g \sim g'$ sse esiste un $h \in \mathrm{V}$ tale che $g' = gh$. Avremmo potuto anche scrivere $g' = hg$, perché $hg = gg^{-1}hg = gh'$ con $h' \in \mathrm{V}$, dato che V è s.g.i. Lasciamo per esercizio di dimostrare che $g \sim g'$ così definita è una *relazione di equivalenza*.

Dunque le simmetrie di O si raggruppano in classi di equivalenza rispetto a V (attenzione: non sono classi di coniugazione!) e si verifica anche che questa equivalenza è compatibile con la legge di composizione, nel senso che se $g_1 \sim g'_1$ e $g_2 \sim g'_2$ è anche $g_1 g_2 \sim g'_1 g'_2$. Possiamo perciò parlare di prodotto di simmetrie *a meno di* V, e otteniamo così proprio il gruppo $\tilde{\mathrm{O}}$. L'operazione di passare da un insieme a quello delle sue classi di equivalenza rispetto a una certa relazione si chiama *quoziente*; poiché in questo caso l'equivalenza è dovuta al s.g.i. V, si parla di *gruppo quoziente di* O *rispetto a* V:

$$\tilde{\mathrm{O}} = \mathrm{O}/\mathrm{V}.$$

È ovvio che il risultato è generale: se $\mathcal{K}$ è s.g.i. di $\mathcal{G}$, si definisce allo stesso modo il gruppo quoziente $\mathcal{G}/\mathcal{K}$. Ciò vuol dire che consideriamo gli elementi di $\mathcal{G}$ *a meno di* $\mathcal{K}$, nel senso che abbiamo visto.

Attenzione: Non è vero in generale che $\mathcal{G}/\mathcal{K}$ sia sottogruppo di $\mathcal{G}$. Nel caso di O/V questo accade, nel seguente senso: O/V è isomorfo a S_3 (infatti permuta i tre colori) e quindi a tutti i D_3. Ma si tratta di un caso eccezionale.

Perché occorre che $\mathcal{K}$ sia s.g.i.? Torniamo all'esempio di O: potremmo usare invece di V ad es. D_4^z? Ciò vuol dire colorare di rosso le due facce del cubo perpendicolari all'asse z e di verde le altre 4. Ora accade questo: una rotazione, per es. di 90° attorno a x, non solo cambia la colorazione, ma cambia le simmetrie che abbiamo convenuto di considerare distinte. Mentre in partenza era indifferente una rotazione attorno a z, ora sono indifferenti quelle attorno ad y. Dunque la situazione è cambiata, e non posso in generale parlare di simmetrie *a meno di* D_4^z. Tutto ciò accade perché D_4^z non è s.g.i. di O.

Torniamo al gruppo quoziente $\mathcal{G}/\mathcal{K}$: esiste un'altra relazione fra questo gruppo e $\mathcal{G}$, che ora dobbiamo esaminare. Dato che un elemento del quoziente corrisponde a una classe di equivalenza in $\mathcal{G}$, è definita in modo naturale un'applicazione *surgettiva*, ma non *iniettiva*, di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{G}/\mathcal{K}$. In altre parole: elementi diversi di $\mathcal{G}$ (quelli tra loro equivalenti) vanno in uno stesso elemento di $\mathcal{G}/\mathcal{K}$, e così facendo si ottengono *tutti* gli elementi di $\mathcal{G}/\mathcal{K}$. Questa applicazione *conserva la legge di composizione*, come abbiamo già visto, ed è quindi un *omomorfismo*. In particolare, gli elementi di $\mathcal{K}$ vanno nell'elemento neutro del quoziente: infatti essi sono equivalenti all'elemento neutro di $\mathcal{G}$ per costruzione. Si dice che $\mathcal{K}$ è il *nucleo* dell'omomorfismo.

Riassumendo, abbiamo dimostrato il seguente teorema: *se $\mathcal{K}$ è s.g.i. di $\mathcal{G}$ il gruppo quoziente $\mathcal{G}/\mathcal{K}$ è omomorfico a $\mathcal{G}$ e $\mathcal{K}$ è il nucleo dell'omomorfismo.* Vale anche il teorema inverso: *dato un omomorfismo $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tra due gruppi, il nucleo $\mathcal{K}$ dell'omomorfismo è s.g.i. di $\mathcal{G}$, e $\mathcal{H}$ è isomorfo a $\mathcal{G}/\mathcal{K}$.*