CAPITOLO 11

Il gruppo SU(2)

Abbiamo già avuto occasione di accennare, nel cap. prec., che il "vero" gruppo delle rotazioni in meccanica quantistica non è SO(3), ma SU(2). Questo capitolo è dedicato ad approfondire la questione. Converrà iniziare la discussione studiando il gruppo SU(2) in astratto; poi ne vedremo la relazione con SO(3) e ciò che ne segue per le r.

Possiamo definire SU(2) come il gruppo delle matrici 2×2 *unitarie e unimodulari*, ossia a determinante 1:

$$MM^+ = I, \quad \det M = 1.$$

Poiché ogni matrice unitaria si può mettere nella forma $M = e^{iA}$, con A hermitiana, e inoltre $\det M = \exp(i \operatorname{Tr} A)$, abbiamo anche

$$A = A^+, \quad \operatorname{Tr} A = 0.$$

Ne segue che A deve essere una combinazione lineare reale delle matrici di Pauli, che ci conviene scrivere nella forma

$$A = \tfrac{1}{2}\varphi\, \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \qquad \text{da cui} \qquad M = \exp\left(\frac{i}{2}\,\varphi\, \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right) \tag{11–1}$$

dove $\vec{n}$ è un vettore unitario di $\mathbb{R}^3$.

L'utilità di questa rappresentazione è la seguente: si verifica facilmente che gli autovalori di $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ sono ± 1 e di conseguenza quelli di M sono $\exp(\pm i\varphi/2)$. In particolare per $\varphi = 0$ si ottiene $M = I$ e per $\varphi = 2\pi$ si ottiene $M = -I$, qualunque sia $\vec{n}$. Se poi $\varphi' = 2\pi + \varphi$ e $\vec{n}' = -\vec{n}$, le due matrici che si ottengono riescono identiche, il che dimostra che ci si può limitare per φ all'intervallo $[0, 2\pi]$. Esclusi i casi $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$, per $\vec{n}$ diversi si ottengono matrici distinte.

Dal fatto che gli autovalori di $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ sono ± 1 segue inoltre che $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = I$, e ciò basta per dimostrare che

$$M = I \cos(\varphi/2) + i\, \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\, \sin(\varphi/2). \tag{11–2}$$

Dunque M è combinazione lineare delle 4 matrici

$$I, \quad i\sigma_1, \quad i\sigma_2, \quad i\sigma_3$$

con i coefficienti

$$x^0 = \cos(\varphi/2), \quad x^1 = n^1 \sin(\varphi/2), \quad x^2 = n^2 \sin(\varphi/2), \quad x^3 = n^3 \sin(\varphi/2)$$

e si vede che $(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$: il punto (x^0, x^1, x^2, x^3) descrive la sfera unitaria S^3 di $\mathbb{R}^4$. In particolare, per $\varphi = 0$ si trova il punto $(1, 0, 0, 0)$ e per $\varphi = 2\pi$ il punto diametralmente opposto $(-1, 0, 0, 0)$. La corrispondenza fra le matrici di SU(2) e i punti della sfera è biunivoca (e continua): in altre parole SU(2) *è omeomeorfo alla sfera* S^3. Ne segue immediatamente che SU(2) *è semplicemente connesso*: proprietà che avrà importanza nel seguito.

Può anche riuscire utile una diversa immagine di SU(2): se consideriamo il vettore $\varphi\vec{n}$ di $\mathbb{R}^3$, ogni elemento del gruppo corrisponde a un punto della palla di raggio 2π; l'unica eccezione si ha per $\varphi = 2\pi$, in cui tutti i punti della superficie sferica corrispondono a uno stesso elemento di SU(2).

Rappresentazione fondamentale e coniugata

Le matrici M usate finora danno la *r. fondamentale* di SU(2), che è bidimensionale, complessa e unitaria. È anche irriducibile, come si vede al modo seguente. Se esistesse un s.s.i., necessariamente unidimensionale, ossia un autovettore comune a tutte le matrici del gruppo, anche il s.s. ortogonale darebbe un altro autovettore. Allora tutte le matrici potrebbero essere diagonalizzate sulla stessa base, e dovrebbero commutare. Ma è evidente che SU(2) *non è commutativo.*

Consideriamo ora, accanto alla generica matrice M, la sua coniugata M^* (formata dagli elementi coniugati, ma non trasposta: non si tratta quindi di M^+). È ovvio che anche le M^* formano una r. di SU(2): il problema è se sia o no equivalente a quella fondamentale.

La risposta è affermativa (si noti che questa è una particolarità di SU(2), non condivisa da SU(n) per $n > 2$). Per dimostrarlo, basta trovare una matrice E che soddisfi $E\sigma_i E^{-1} = -\sigma_i^*$: infatti dalla (11–2) segue che allora

$$EME^{-1} = M^*. \tag{11–3}$$

Dato che nella consueta rappresentazione delle matrici di Pauli solo σ_2 è immaginaria, si vede che basta prendere E multipla di σ_2. Ci converrà averla reale, e porremo perciò

$$E = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sarà utile per il seguito tener presente che dalla (11–3) segue $EM = M^*E$ e poi, dato che M è unitaria:

$$M^{\mathrm{T}}EM = E. \tag{11–4}$$

Lo spazio supporto della r. fondamentale è $\mathbb{C}^2$: il generico elemento sarà

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$$

su cui M agisce così: ${\xi'}^a = M^a{}_b\,\xi^b$. Se ξ e η sono due vettori di $\mathbb{C}^2$, è facile verificare che $E_{ab}\,\xi^a\eta^b = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$ è *invariante*: infatti se $\xi' = M\xi$ e $\eta' = M\eta$, si ha

$$\begin{aligned} E_{ab}\,{\xi'}^a{\eta'}^b &= E_{ab}\,M^a{}_{a'}\,\xi^{a'}\,M^b{}_{b'}\,\eta^{b'} = (M^{\mathrm{T}})_{a'}{}^a\,E_{ab}\,M^b{}_{b'}\,\xi^{a'}\eta^{b'} \\ &= (M^{\mathrm{T}}EM)_{a'b'}\,\xi^{a'}\eta^{b'} = E_{a'b'}\,\xi^{a'}\eta^{b'} \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (11–4)). ■

Relazione fra SU(2) e SO(3)

Consideriamo lo spazio $\mathcal{V}$ delle matrici hermitiane 2×2 a traccia nulla: si tratta di uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, in cui una possibile base è data dalle matrici di Pauli. In altre parole, tutte le matrici di $\mathcal{V}$ si ottengono in modo univoco da $A = x^i\sigma_i$, con x^i reali. Poiché una trasformazione del tipo $A' = MAM^{-1}$ conserva la traccia, e se M è unitaria da una A hermitiana si ottiene una A' ancora hermitiana, abbiamo che $\mathcal{V}$ è lasciato invariante dalle matrici $M \in \mathrm{SU}(2)$. È anche facile verificare che la trasformazione scritta dà una r. di SU(2) su $\mathcal{V}$. Vogliamo ora studiare questa r.

Per una generica M, avremo

$$M\sigma_i M^{-1} = \sigma_{i'}[D(M)]^{i'}{}_i \tag{11–5}$$

e dobbiamo trovare le proprietà delle matrici D. Partiamo dalla nota identità

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\,I + i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k.$$

Applicando $M \cdots M^{-1}$ a entrambi i membri:

$$M\sigma_i\sigma_j M^{-1} = \delta_{ij}\,I + i\,\varepsilon_{ijk}\,M\sigma_k M^{-1}$$

Nota: Si tenga presente che gli indici i, j, k distinguono le diverse matrici di Pauli: non sono gli indici delle righe e colonne. La scelta di scriverli in alto o in basso è più che altro di comodità grafica.

Usando la (11–5) a primo membro:

$$\begin{aligned} M\sigma_i\sigma_j M^{-1} &= M\sigma_i M^{-1}\,M\sigma_j M^{-1} = \sigma_{i'}D^{i'}{}_i\,\sigma_{j'}D^{j'}{}_j \\ &= (\delta_{i'j'}\,I + i\,\varepsilon_{i'j'k'}\,\sigma_{k'})\,D^{i'}{}_i\,D^{j'}{}_j = I\,D^{i'}{}_i\,D^{i'}{}_j + i\,\varepsilon_{i'j'k'}\,\sigma_{k'}\,D^{i'}{}_i\,D^{j'}{}_j. \end{aligned}$$

A secondo membro invece si ha

$$\delta_{ij}\,I + i\,\varepsilon_{ijl}\,\sigma_{k'}\,D^{k'}{}_l$$

e confrontando:

$$D^{i'}{}_i\,D^{i'}{}_j = \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{i'j'k'}\,D^{i'}{}_i\,D^{j'}{}_j = \varepsilon_{ijl}\,D^{k'}{}_l.$$

La prima dice che le D *sono ortogonali*; la seconda invece deve essere elaborata. Moltiplichiamola per $D^{k'}{}_k$:

$$\varepsilon_{i'j'k'}\, D^{i'}{}_i\, D^{j'}{}_j\, D^{k'}{}_k = \varepsilon_{ijl}\, D^{k'}{}_l\, D^{k'}{}_k = \varepsilon_{ijk}.$$

Il primo membro non è che $\varepsilon_{ijk} \det D$ (teorema di Laplace) e si arriva così a $\det D = 1$.

Dunque $D(M) \in \mathrm{SO}(3)$; resta da dimostrare che ogni matrice di SO(3) si può ottenere per questa via. Un modo di descrivere una rotazione è dare l'asse (orientato) $\vec{n}$ e l'angolo φ (fra 0 e π). Usiamo $\vec{n}$ e φ per costruire una matrice M come in (11–1): è allora ovvio che $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ (che sta in $\mathcal{V}$) commuta con M, il che prova che l'asse della rotazione così ottenuta è proprio $\vec{n}$. Quanto all'angolo, è facile dimostrare che è quello giusto per una rotazione attorno all'asse z, guardando come si trasformano σ_1 e σ_2; e si può capire che la dimostrazione si estende a un asse qualunque.

Conclusione: *la r. di* SU(2) *data dalla* (11–5) *coincide con la r. fondamentale di* SO(3). Esiste dunque un omomorfismo α di SU(2) su SO(3): il problema è se sia un isomorfismo, e in caso contrario quale sia il nucleo. La risposta è facile: per la (11–5) condizione nec. e suff. perché sia $M \in \ker\alpha$ è che commuti con tutte e tre le matrici di Pauli. Ora le sole matrici che hanno questa proprietà sono i multipli dell'identità, e in SU(2) ce ne sono soltanto due: I e $-I$. Questo è dunque il nucleo cercato, che è ovviamente s.g.i. di SU(2).

Si può dire la cosa in un altro modo: qualunque sia M, le due matrici M e $-M$ (e solo queste) generano la stessa rotazione di SO(3). Nella raffigurazione di SU(2) come sfera S^3, si tratta dei punti diametralmente opposti.

Sottogruppi invarianti e rappresentazioni di SU(2)

Un sottoprodotto della nostra analisi è che SU(2) *non è semplice*; non è però evidente se abbia altri s.g.i. oltre quello trovato. La risposta è negativa: *il solo s.g.i. di* SU(2) è $\mathcal{K} = \{I, -I\}$.

Dim: Premettiamo un'osservazione. Sia $\mathcal{G}$ un gruppo, $\mathcal{G}_1$ un suo s.g.i. Dato un omomorfismo $\omega : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, l'immagine di $\mathcal{G}_1$ è s.g.i. di $\mathcal{G}'$. (Lo si vede applicando le definizioni.)

Sia ora $\mathcal{G}_1$ un s.g.i. di SU(2): poiché SO(3) è semplice, quanto all'immagine di $\mathcal{G}_1$ per l'omomorfismo α sopra studiato possono darsi solo due casi: $\alpha(\mathcal{G}_1) = I$ oppure $\alpha(\mathcal{G}_1) = \mathrm{SO}(3)$. Nel primo caso $\mathcal{G}_1 = \{I\}$ oppure $\mathcal{G}_1 = \ker\alpha = \mathcal{K}$; resta il secondo caso.

Prendiamo in SO(3) una rotazione di π, per es. attorno all'asse z: deve esistere in $\mathcal{G}_1$ una M la cui immagine è tale rotazione. Ma sappiamo che in SU(2) ci sono solo due tali matrici: $\pm i\sigma_3$. Almeno una delle due sta in $\mathcal{G}_1$ e lo stesso vale per il suo quadrato, che è $-I$. Abbiamo così dimostrato che per ogni $M \in \mathcal{G}_1$ anche $-M \in \mathcal{G}_1$. Ma allora $\mathcal{G}_1$ coincide con SU(2). ■

Da questo risultato sui s.g.i. di SU(2) deriva una conseguenza per le sue r. Se escludiamo la r. banale, esse sono di due tipi:

- quelle fedeli
- quelle che hanno $\mathcal{K}$ come nucleo.

È ovvio che le seconde sono anche r. (necessariamente fedeli) di SO(2). Invece quelle del primo tipo *non sono r. di* SO(3), perché due matrici M e $-M$ di SU(2), che hanno la stessa immagine in SO(3), hanno immagini diverse nella r. Si dice spesso che si tratta di r. *a due valori* di SO(3): vedremo fra poco che cosa questo significa.

Possiamo anche dire di più. Se ϱ è una r. fedele di SU(2), è anche r. fedele di $\mathcal{K}$. Supponiamo che ϱ, oltre a essere fedele, sia anche irriducibile. Indichiamo per brevità con J' l'immagine di $-I$: allora $J' \neq I'$ (la matrice identità sullo spazio supporto di ϱ) perché ϱ è fedele. Però $(-I)^2 = I$, da cui segue ${J'}^2 = I'$: dunque gli autovalori di J' sono ± 1. D'altra parte J' deve commutare con tutte le $\varrho(M)$, in quanto $-I$ commuta con tutte le M: allora per il secondo lemma di Schur sarà $J' = -I'$.

Abbiamo così dimostrato che *in una r.i. e fedele di* SU(2) *la matrice* $-I$ *va in* $-I'$. Conseguenza: *nelle r.i. a due valori di* SO(3) *i "due valori" differiscono solo per il segno.*

Rappresentazioni tensoriali di SU(2)

Mediante un prodotto tensoriale $\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2$ si definiscono dei tensori di rango qualsiasi $T^{a_1 \cdots a_n}$, che si trasformano secondo il prodotto diretto $D \otimes \cdots \otimes D$ della r. fondamentale D per se stessa n volte. Però questa r. *è riducibile*, come si vede sull'esempio $n = 2$: infatti $E_{ab}\, T^{ab}$ è invariante. Poiché E è una matrice antisimmetrica, ciò equivale a dire che i tensori simmetrici di rango 2 formano un s.s.i., e che quelli antisimmetrici equivalgono a scalari. Dall'espressione (11–2) della r. fondamentale si vede facilmente che non ci sono s.s.i. di dimensione inferiore: *la r. dei tensori simmetrici è irriducibile.*

Questo risultato si generalizza senza difficoltà: *tutti i tensori simmetrici, di qualsiasi rango, si trasformano secondo una r.i. di* SU(2). È anche facile calcolarne la dimensione: poiché ci sono due valori possibili per gli indici, e il tensore è simmetrico, il numero di componenti indipendenti è uguale al rango aumentato di 1. Ne segue che per ogni intero positivo esiste una r.i. di SU(2) che ha quella dimensione. Si dimostra inoltre che tale r. è unica (a meno di equivalenza).

Tradizionalmente le r.i. di SU(2) di classificano con un j che assume valori semiinteri: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ La dimensione della r. D_j è $2j + 1$. Sempre dalla (11–2) si vede che nella r. D_j gli autovalori di ciascuna $D_j(M)$ sono $e^{im\varphi}$ $(m = j, \ldots, -j)$. In particolare per $\varphi = 2\pi$ gli autovalori valgono tutti 1 o -1 a seconda che j sia intero o semidispari.

Per quanto abbiamo detto sopra, se j è intero la r. non è fedele, quindi è anche r. vera di SO(3); se invece j è semidispari la r. è fedele per SU(2), ed è a due valori per SO(3). Le prime hanno dimensione pari, le seconde dispari. È chiaro che in questo modo *si ottengono tutte le r.i. di* SO(3): infatti ogni r.i. di SO(3) lo è anche (non fedele) di SU(2), e perciò deve coincidere con una D_j (j intero).

SU(2) come ricoprimento universale di SO(3)

Abbiamo già visto che la relazione fra SU(2) e SO(3) è un omomorfismo α il cui nucleo consiste delle matrici I e $-I$ di SU(2) che si ottengono, nella parametrizzazione (11–2), risp. ponendo $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$. Abbiamo anche visto che più in generale due punti diametralmente opposti della sfera S^3 vanno in uno stesso elemento di SO(3).

Possiamo andare più a fondo considerando ad es. l'insieme di elementi di SU(2) che si ottengono dalla (11–2) se si tiene fisso $\vec{n}$ e si fa variare con continuità φ da 0 a 2π. Si ottiene in tal modo un arco di curva *aperto*, perché gli estremi sono distinti: in S^3 si percorre il "mezzo meridiano" da un polo all'altro.

L'immagine di questo arco in SO(3) tramite α consiste nelle rotazioni di angolo φ con asse $\vec{n}$: al variare di φ da 0 a 2π si ottengono tutte tali rotazioni, e alla fine si ritorna al punto di partenza (ruotare di 2π è come non ruotare affatto). Dunque l'immagine *è una curva chiusa.*

Questa curva chiusa ha una particolarità: *non è possibile*, con una deformazione continua, *ridurla a un punto.* Lo si può capire ad es. ragionando su S^3. L'omomorfismo α consiste nell'identificare punti diametralmente opposti: l'arco che univa i due poli diventa chiuso, in quanto i due poli vengono visti come uno stesso punto. Però una curva che congiunge i due poli deve attraversare un numero dispari di volte l'equatore, e nessuna deformazione continua può ridurla a una curva che *non* attraversa l'equatore, perché una deformazione continua introdurrà o cancellerà sempre un numero pari d'intersezioni.

Questo argomento, che può essere reso rigoroso, dimostra che SO(3) *è connesso ma non semplicemente connesso*, mentre sappiamo che SU(2) è sempl. connesso. Si può dimostrare di più: *i cammini chiusi di* SO(3) *cadono in due sole classi* (di equivalenza): *quelli riducibili a un punto, e quelli che non lo sono.* In particolare è riducibile a un punto il cammino chiuso che consiste in una rotazione con φ che cresce da 0 a 4π, ossia in due giri completi.

Nota 1: In generale la situazione è più complessa: ad es. per il gruppo $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$, che è omeomorfo a un toro, la classificazione è assai più ricca, perché si può girare attorno al toro infinite volte.

Senza dare ulteriori dettagli, e tralasciando alcune ipotesi che sarebbero necessarie per essere rigorosi, ma che sono comunque soddisfatte nei casi che possono interessarci, ci limitiamo qui ad asserire che

– Alle classi di equivalenza dei cammini chiusi di un gruppo topologico connesso $\mathcal{G}$ si può dare una struttura di gruppo, che si chiama *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* $\pi_1(\mathcal{G})$ di $\mathcal{G}$.

– $\pi_1(\mathcal{G})$ è sempre commutativo (nel caso di SO(3) questo è banale, visto che contiene due soli elementi).

– Esiste uno e un solo gruppo topologico sempl. connesso, $\tilde{\mathcal{G}}$, localmente isomorfo a $\mathcal{G}$, di cui $\pi_1(\mathcal{G})$ è s.g.i. e tale che $\tilde{\mathcal{G}}/\pi_1(\mathcal{G})$ è isomorfo a $\mathcal{G}$; ossia che esiste un omomorfismo $\tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ il cui nucleo è $\pi_1(\mathcal{G})$. $\tilde{\mathcal{G}}$ si chiama *ricoprimento universale* di $\mathcal{G}$.

Nota 2: Occorre chiarire il significato di "localmente isomorfo": vuol dire che esistono due intorni degli elementi neutri di $\tilde{\mathcal{G}}$ e di $\mathcal{G}$ e un'applicazione biunivoca e bicontinua (omeomorfismo) tra quegli intorni che conserva la legge di composizione. È facile verificare che questa è la situazione fra SU(2) e SO(3), con l'applicazione α data dalla (11–5): sebbene sugli interi gruppi α sia un omomorfismo, se ci si restringe a $\varphi < \pi$ la corrispondenza è biunivoca.

Nota 3: È anche chiaro che la relazione fra SU(2) e SO(3) è proprio quella descritta dalle proposizioni scritte sopra: SU(2) è sempl. connesso, SO(3) no; il gruppo fondamentale di SO(3) è proprio il nucleo dell'omomorfismo α che esiste fra i due gruppi.

Si capisce ora che in un certo senso *non è vero* che "ruotare di 2π è come non ruotare affatto": una rotazione di 2π, intesa non come singola trasformazione, ma come curva continua, non può essere modificata con continuità fino a ridurla al non fare nessuna rotazione. Ciò è invece possibile se si fanno due giri. La cosa si può verificare facilmente con modelli geometrici.

SU(2) e la fisica

Fino a questo punto abbiamo fatto solo matematica; dobbiamo ora capire che cosa ha a che vedere SU(2) con la fisica. Infatti l'argomento del par. precedente non sembra significativo: se quello che conta è lo stato a cui si arriva, lo stato che si ottiene dopo una rotazione di 2π è lo stesso di quello iniziale, e ci si aspetterebbe perciò che il gruppo di simmetria rilevante sia SO(3) con le sue r.; non SU(2).

Non bisogna però dimenticare quanto avevamo già osservato parlando di trasformazione degli stati per simmetria: gli stati non sono i vettori, ma i raggi, per cui le r. vanno intese come r. *proiettive*, ossia a meno di un fattore di fase. Le r. a due valori di SO(3) sono proprio di questo tipo.

Vediamo infatti la situazione: sia $M \in \mathrm{SU}(2)$; $R = \alpha(M)$ la rotazione di SO(3) ottenuta col solito omomorfismo, e ricordiamo che α è un isomorfismo locale, il che vuol dire invertibile entro certi intorni. Sappiamo già come procedere: se $\vec{n}$ e φ sono asse e angolo di rotazione di R, possiamo definire $M = \alpha^{-1}(R)$ con la (11–1) (o con la (11–2)). Se ad es. abbiamo a che fare con gli stati $j = 1/2$

di un atomo, o con una particella di spin 1/2, sarà proprio M la legge di trasformazione degli stati, ossia la r. di SO(3) su quel particolare s.s.

Però non si tratta di una r. vera, come si vede con un caso particolare. Se la rotazione R è lungo l'asse z, di angolo $2\pi/3$, la (11–2) ci dà

$$M = \alpha^{-1}(R) = \tfrac{1}{2}\,(I + i\sqrt{3}\,\sigma_3).$$

Consideriamo ora R^2: se partiamo da $\alpha^{-1}(R^2) = M^2$ otteniamo

$$\tfrac{1}{2}\,(-I + i\sqrt{3}\,\sigma_3) \tag{11–6}$$

ma se invece leggiamo R^2 come una rotazione di $2\pi/3$ in verso opposto, ossia con opposto $\vec{n}$, la stessa (11–2) ci porta a

$$\tfrac{1}{2}\,(I - i\sqrt{3}\,\sigma_3). \tag{11–7}$$

Applicando la (11–6) o la (11–7) otterremo trasformazioni diverse del vettore di stato, che differiscono solo per il segno: *lo stato finale è lo stesso*, ed è ciò che conta. Abbiamo dunque a che fare con una r. proiettiva, come asserito.

Non si deve però credere che la questione sia puramente matematica, ossia che non vi sia alcun modo per riconoscere le r. a due valori da quelle vere. Una situazione di particolare evidenza si presenta negli esperimenti d'*interferometria con neutroni.*

Riducendo la descrizione sperimentale allo stretto indispensabile, si tratta di questo: mediante monocristalli di silicio è possibile costruire l'esatto analogo, per neutroni termici, di un interferometro di Mach–Zehnder. Il neutrone che attraversa l'interferometro può percorrere due cammini separati spazialmente e che vengono ricombinati alla fine, e si riesce ad avere sovrapposizione coerente, quindi interferenza.

Si può alterare il cammino ottico su uno dei percorsi in vari modi (per es. facendoli svolgere a quote diverse, ma questo ora non interessa); è anche possibile alterare lo stato di spin del neutrone, mediante un campo magnetico. Si sfrutta il fatto che i neutroni non vengono deflessi dal campo, in quanto neutri, ma lo spin "precede" nel campo, dato che il neutrone ha momento magnetico. Variando l'intensità del campo si può far ruotare lo spin quanto si vuole: in particolare potrà fare uno o più giri interi.

Il risultato è quello prevedibile: se lo spin ruota di un solo giro, lo stato torna lo stesso, ma il vettore di stato cambia segno. Poiché ciò accade solo su uno dei percorsi, se in assenza di campo l'interferenza era costruttiva ora sarà distruttiva, e il numero di neutroni rivelati cadrà a zero. Invece con campo doppio (due giri) la fase torna quella giusta per avere interferenza di nuovo costruttiva.