Cap. 1 – Gli spazi di Hilbert nelle teorie di campo

Primo assioma di Wightman; spazi di Hilbert; separabilità

Oggetto di questo corso è lo studio delle simmetrie e invarianze nella teoria dei campi alla Wightman. Inizieremo col presentare e discutere gli assiomi della teoria; tale procedimento di presentazione e discussione verrà seguito e sviluppato durante tutto il corso.

Il primo assioma è comune all'ordinaria meccanica quantistica, e riguarda l'introduzione di uno spazio vettoriale.

Si associa perciò a ogni stato fisico un raggio unitario, cioè un insieme di vettori normalizzati, che differiscono tra loro per un fattore di fase. Richiederemo che tale spazio vettoriale sia definito sul campo complesso, e ciò per gli stessi motivi che vengono addotti per le teorie quantistiche ordinarie (cfr. ad es. Dirac, cap. 1). In secondo luogo richiederemo che nello spazio sia dato un prodotto scalare che induca una metrica definita positiva, e che lo spazio sia completo. Questo insieme di requisiti si esprime anche dicendo che lo spazio sia di Hilbert.

L'ipotesi di una metrica definita positiva è tipica della meccanica quantistica ordinaria, e anche in questa trattazione l'ipotesi viene mantenuta nonostante che in certi studi di teoria dei campi abbia avuto successo l'introduzione di una metrica non positiva [1]); sull'argomento si tornerà più diffusamente nel seguito, e si vedrà che l'assunzione di metrica positiva in questa trattazione non è in contrasto sostanziale con le teorie che fanno uso di metriche non positive.

Come terzo requisito per lo spazio vettoriale poniamo la separabilità, ossia l'esistenza nello spazio di una base ortonormale numerabile. Per gli spazi di Hilbert della meccanica quantistica ordinaria la separabilità è sempre soddisfatta; nel caso di teorie di campo può sembrare che sorgano delle difficoltà.

Consideriamo ad esempio un sistema costituito da un'infinità numerabile di sottosistemi, ciascuno con un'infinità numerabile di stati: ad esempio infiniti oscillatori armonici indipendenti.

Dal punto di vista matematico possiamo associare all'intero sistema uno spazio di Hilbert $\bar{\mathcal{H}}$ prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert relativi a ciascuno degli oscillatori:

$$\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2 \otimes \cdots$$

ossia, in termini di basi, date

$$\{f_i^1\}, \{f_j^2\}, \ldots$$

basi in $\mathcal{H}^1$, $\mathcal{H}^2$, ... (con $i, j, \ldots \in N$) l'insieme delle successioni

$$\{f_i^1, f_j^2, \ldots\}$$

in genere intese come "prodotti," costituisce una base in $\bar{\mathcal{H}}$.

Indichiamo con N la cardinalità degli interi (insieme numerabile), con C il continuo; essendo $\mathrm{N}^{\mathrm{N}} = \mathrm{C}$, segue che la base di $\mathcal{H}$ che si è costruita ha la potenza del continuo, e dunque $\bar{\mathcal{H}}$ non è separabile. Poiché, detto z un qualunque intero > 1, si ha $z^{\mathrm{N}} = \mathrm{C}$, segue che lo spazio $\bar{\mathcal{H}}$ non è separabile anche nel caso di un'infinità numerabile di sottosistemi ciascuno con un numero finito di stati, ad es. 2, come succede nel caso d'infiniti oscillatori di Fermi.

Ci si può ora domandare se la descrizione fin qui data per un sistema d'infiniti sottosistemi, ciascuno con un numero finito o al più numerabile di stati indipendenti, sia l'unica descrizione possibile, e se sia plausibile dal punto di vista fisico.

Consideriamo più da vicino il caso del sistema di oscillatori di Fermi, descritto, in base allo schema precedente, da vettori base del tipo

$$\{\lambda^1, \lambda^2, \ldots\} \quad \text{con} \quad \lambda^n = 0, 1.$$

Introduciamo un numero quantico ϱ che esprima il numero di oscillatori che sono nello stato eccitato (cioè con il λ relativo uguale a 1). In questo modo si vengono a considerare in $\bar{\mathcal{H}}$ i sottospazi $\mathcal{H}_j$: $\mathcal{H}_j$ è il sottospazio in cui $\varrho = j$, con $j = 0, 1, \ldots$ Gli spazi $\mathcal{H}_j$ sono evidentemente separabili; anzi $\mathcal{H}_0$, caratterizzato dall'avere i λ tutti nulli, è addirittura a dimensione uno.

Si consideri poi la somma diretta $\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j$; $\mathcal{H}$ è uno spazio separabile, avendo una base numerabile (si pensi alla diagonalizzazione di Cantor). Lo spazio $\mathcal{H}$ non coincide con $\bar{\mathcal{H}}$: infatti nessuno dei vettori base di $\mathcal{H}$ rappresenta stati in cui infiniti oscillatori sono eccitati.

Poiché d'altra parte uno stato con infiniti oscillatori eccitati è di scarso interesse dal punto di vista fisico, corrispondendo a un'energia infinita, si vede che ci si può limitare a considerare il sottospazio $\mathcal{H}$ per la descrizione dell'intero sistema, in luogo del prodotto tensoriale degli spazi relativi a ogni insieme componente; e in questo modo si ottiene uno spazio separabile.

Si noti che la restrizione a cui è stato sottoposto lo spazio $\bar{\mathcal{H}}$ non vieta che il *numero medio* di oscillatori eccitati sia infinito. Si consideri un vettore

$$f = \sum c_q f_q, \qquad f_q \in \mathcal{H}_q, \qquad \sum |c_q|^2 < \infty.$$

Prendendo ad esempio $c_q = 1/q$, $\sum |c_q|^2$ converge, ma il valor medio dell'operatore ϱ, $\sum q\,|c_q|^2 = \infty$.