Cap. 9 – Il Teorema di Ricostruzione

Enunciato del teorema

In questo capitolo prenderemo in esame il Teorema di Ricostruzione: senza dimostrarlo in maniera esauriente e rigorosa, metteremo in risalto i punti fondamentali e più significativi della dimostrazione. Il Teorema di Ricostruzione si enuncia:

Dato un insieme di distribuzioni temperate tali da soddisfare le proprietà da a) a f) del cap. precedente, esiste una teoria di campo alla Wightman, unica a meno di trasformazioni unitarie, avente per funzioni di Wightman le distribuzioni assegnate.

Il significato del Teorema di Ricostruzione sta nello stabilire che le proprietà a) ... f) sono caratteristiche delle funzioni di Wightman: quando cioè esse siano assegnate, è possibile costruire una teoria in modo univoco (a meno di equivalenze unitarie), cioè è possibile determinare uno spazio di Hilbert e degli operatori di campo che soddisfino gli assiomi di Wightman I ... VI del Cap. 8.

Il Teorema di Ricostruzione, come indica il nome stesso, fornisce una costruzione dello spazio di Hilbert, degli operatori di campo, della rappresentazione del gruppo $\mathcal{P}$ e dello stato di vuoto che soddisfano appunto gli assiomi.

Dimostrazione del teorema: lo spazio $\mathcal{V}$

Per la costruzione dello spazio di Hilbert procediamo per gradi, e osserviamo anzitutto che nella teoria che dobbiamo costruire i vettori saranno del tipo Ω, $A\Omega$, $AA\Omega$ ... e vogliamo che l'insieme Ω, $A\Omega$, $AA\Omega$ ... sia denso in $\mathcal{H}$.

Consideriamo in primo luogo stati del tipo $A\Omega$, $AA\Omega$ ... più precisamente è $A\,\Omega = A(f)\,\Omega$; questo stato è dunque essenzialmente caratterizzato dalla funzione f; analogamente $A\,A\,\Omega = A(f_1)\,A(f_2)\,\Omega$; la funzione che caratterizza lo stato è dunque $f_1(x_1)f_2(x_2)$, cioè essenzialmente una $f = f(x_1, x_2)$. È allora facile convincersi che uno stato $A_1 A_2 \ldots A_n\,\Omega$ è individuato da una funzione del tipo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, e il vuoto è caratterizzato da un numero. Lo stato generico è allora rappresentato da una successione di funzioni

$$f_0, f_1, \ldots \quad f_k \in \mathcal{S}(\mathrm{I\!R}^{4k}).$$

Prendiamo ora l'insieme delle successioni per le quali solo un numero finito di funzioni è diverso da zero, facciamone la chiusura lineare, e otteniamo così uno spazio lineare $\mathcal{V} = \{\{f^k\}\} = \{(f_0, \ldots, f_n, \ldots)\}$. In secondo luogo dotiamo lo spazio $\mathcal{V}$ di un prodotto scalare: prendendo per semplicità in considerazione esclusivamente funzioni $\mathcal{W}$ tali che a un dato insieme di variabili x corrisponda una sola funzione $\mathcal{W}$ (avremo allora una teoria di campo scalare) e indicando con f la successione $\{f_k\}$, il prodotto scalare si definisce:

$$(f,g) = \sum_{k,j} \int dx\, dy\, f_k^*(x_1,\ldots,x_k)\, \mathcal{W}^{(k+j)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_j)\, g_j(y_1,\ldots,y_j) \tag{9–1}$$

dove $\mathcal{W}^{(k+j)}$ indica la funzione $\mathcal{W}$ in $k+j$ argomenti; per definizione poniamo $\mathcal{W}^0 = 1$.

Dalle proprietà c) ed e) del Cap. 8 per le funzioni $\mathcal{W}$, segue rispettivamente:

$$(f,g)^* = (g,f)$$
$$(f,f) \geq 0.$$

La definizione data soddisfa dunque le proprietà usualmente richieste per il prodotto scalare; tale prodotto scalare non induce però una metrica definita: in generale infatti $(f,f) = 0$ non implica $f = 0$.[(1)] Per questa ragione $\mathcal{V}$ non è uno spazio di Hilbert.

Possiamo tuttavia definire su $\mathcal{V}$ una rappresentazione del gruppo di Poincaré: data $f \in \mathcal{V}$, $f = \{f_k\}$, si definisce

$$U(a,\Lambda)f = \{f_{k;a,\Lambda}\} \quad \text{con} \quad f_{k;a,\Lambda}(x) = f_k(\Lambda^{-1}(x-a)).$$

È facile verificare che U è una rappresentazione del gruppo $\mathcal{P}$, e che essa è invertibile e conserva i prodotti scalari: $(Uf, Ug) = (f,g)$. Questo non implica però che U sia unitaria, perché il prodotto scalare (9–1) non induce una metrica definita.

Il vuoto e gli operatori di campo

Definiamo ora gli operatori di campo nello spazio $\mathcal{V}$:

$$A(h_1)f = \{0, h_1 f_1, h_1 f_2, \ldots\}$$

dove al membro sinistro f denota come di consueto la successione $\{f_k\}$, e al membro destro $h_1 f_{n-1}$ sta per $h_1(x_1) f_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)$.

Tale definizione è plausibile tenendo presente quanto detto all'inizio di questo capitolo sulla costruzione dei vettori dello spazio. Si può verificare rigorosamente che gli $A(h)$ soddisfano le proprietà degli operatori di campo, e che grazie alla scelta fatta per le $\mathcal{W}$ sono degli scalari. Possiamo pure definire in $\mathcal{V}$ il "vuoto," cioè l'elemento invariante per trasformazioni del gruppo $\mathcal{P}$. Un vettore invariante di $\mathcal{V}$ è ad esempio $\omega = \{1, 0, \ldots\}$.

---

(1) Si ricordi che con la notazione adottata, $f = 0$ significa $\{f\} = \{0, 0, \ldots\}$.

Il problema della norma: passaggio al quoziente $\mathcal{V}'$

Come si è già accennato, $\mathcal{V}$ non è spazio di Hilbert, poiché non è dotato di metrica definita. Ci proponiamo ora di costruire uno spazio a norma definita (positiva). In generale, uno spazio vettoriale è dotato di norma semidefinita se il sottospazio dei vettori a norma nulla $\mathcal{V}_0$ è uno spazio vettoriale. Nel nostro caso l'insieme dei vettori a norma nulla è effettivamente uno spazio vettoriale, come si può controllare senza difficoltà; per ottenere uno spazio a norma definita basta allora prendere il quoziente $\mathcal{V}' = \mathcal{V}/\mathcal{V}_0$. In effetti in $\mathcal{V}'$ può essere definito un prodotto scalare che induce una metrica definita positiva.

Denotiamo con $\bar{f}$ un elemento di $\mathcal{V}'$: esso è la classe di equivalenza costituita dai vettori f (che a loro volta sono le successioni $\{f_k\}$) che differiscono tra loro per vettori a norma nulla. Definiamo allora $(\bar{f}, \bar{g}) = (f, g)$, con $f, g \in \mathcal{V}$, cioè elementi arbitrari delle classi di equivalenza che definiscono rispettivamente $\bar{f}$ e $\bar{g}$. La definizione di $(\bar{f}, \bar{g})$ è ben posta, perché è possibile dimostrare che detto f_0 un elemento di $\mathcal{V}$ a norma nulla, vale $(f_0, g) = 0$.

Si pone quindi il problema della possibilità di trasferire nello spazio $\mathcal{V}'$ la rappresentazione U del gruppo $\mathcal{P}$, gli operatori di campo A e il vuoto Ω. Osserviamo che è possibile trasferire U da $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}'$, e ciò perché $\mathcal{V}_0$, rispetto al quale $\mathcal{V}'$ è il quoziente di $\mathcal{V}$, è un sottospazio invariante per U, essendo costituito dai vettori a norma nulla. Analoga conclusione vale per A, in virtù della proprietà e). Il vuoto in $\mathcal{V}'$ rimane semplicemente definito come la classe di equivalenza di ω.

Completamento di $\mathcal{V}'$: lo spazio $\mathcal{H}$

Notiamo a questo punto che $\mathcal{V}'$ non è ancora uno spazio di Hilbert, non essendo completo. Per ottenere uno spazio completo è necessario considerare anziché le $\bar{f}$ le successioni di Cauchy di funzioni $\bar{f}$: $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots$ tali cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 : \quad ||\bar{f}_m - \bar{f}_n|| < \varepsilon \quad \text{se} \quad n, m > \lambda.$$

In questo modo si ottiene lo spazio delle successioni delle $\bar{f}$: in esso però la metrica non è definita. Per ottenere uno spazio a metrica definita, e nello stesso tempo per considerare come lo stesso vettore tutte le diverse successioni di Cauchy che convergono allo stesso elemento, è necessario considerare lo spazio quoziente rispetto alla metrica: in questo modo otteniamo finalmente lo spazio $\mathcal{H}$, dotato di metrica definita e completo, cioè di Hilbert.

Osserviamo che si può scrivere la seguente relazione:

$$\mathcal{V}' \subset \mathcal{H}.$$

Essa va intesa nel senso che una funzione $\bar{f}$ di $\mathcal{V}'$ si può identificare con la successione di Cauchy $\bar{f}, \bar{f}, \ldots$, la cui classe di equivalenza è un vettore di $\mathcal{H}$. Si noti ancora che, per costruzione, $\mathcal{V}'$ è denso in $\mathcal{H}$.

Rappresentazione del gruppo di Poincaré; unicità del vuoto

Per dimostrare che gli operatori U si possono definire anche nello spazio $\mathcal{H}$ occorre tener presente che U è continuo nel senso che, detti Ψ_f e Ψ_g due vettori di $\mathcal{H}$ ottenuti mediante il procedimento suaccennato dalle funzioni f e g, vale

$$||U(a,\Lambda)\Psi_f - U(a,\Lambda)\Psi_g|| = ||\Psi_f - \Psi_g||$$

e quindi, essendo $\mathcal{V}'$ denso in $\mathcal{H}$, U può essere esteso per continuità a tutto $\mathcal{H}$. Per completare la dimostrazione è ancora necessario provare che U conserva i prodotti scalari in $\mathcal{H}$, ed è continuo rispetto all'argomento (a,Λ).

Analogamente si può procedere per gli operatori di campo A.

Nello spazio $\mathcal{H}$ è pure definito il vuoto Ω: esso risulta essere la classe di equivalenza delle successioni di Cauchy delle classi di equivalenza della successione delle funzioni di prova $\{1,0,0,\ldots\}$.

Dimostriamo ora che il vuoto è unico. Ammettiamo per assurdo che esista un vettore $\Omega' \neq \Omega$ invariante per trasformazioni del gruppo di Poincaré; senza alcuna perdita di generalità possiamo supporre $(\Omega',\Omega) = 0$. Se Ω' è del tipo Ψ_f, l'ipotesi che sia invariante per trasformazioni di $\mathcal{P}$, implica

$$(\Omega',\Omega') = (\Omega', U(\varrho\, a, 1)\,\Omega')$$

e passando al limite per $\varrho \to \infty$ la proprietà f) dice che

$$(\Omega',\Omega') = (\Omega',\Omega)(\Omega,\Omega') \quad \Rightarrow \quad (\Omega',\Omega') = 0.$$

Se Ω' non è della forma Ψ_f, poiché l'insieme delle Ψ_f è denso in $\mathcal{H}$, ci si riconduce essenzialmente al caso precedente.

Unicità della teoria

Concludiamo con alcune osservazioni sull'unicità della teoria: dire che la teoria che abbiamo costruito è unica a meno di trasformazioni unitarie significa che, dato lo spazio $\mathcal{H}$, gli operatori A, il vuoto Ω, se esiste un altro spazio $\mathcal{H}'$, altri operatori A', un altro vuoto Ω' cui corrispondono le stesse funzioni di Wightman, allora esiste una trasformazione unitaria V tale che $A' = V A\, V^{-1}$, $\Omega' = V\Omega$ e analoga legge di trasformazione vale per i vettori di $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{H}$.

Definiamo la trasformazione V che porta un vettore Ψ_f di $\mathcal{H}$ in un vettore Ψ'_f di $\mathcal{H}'$ nel seguente modo:

$$\Psi'_f = V\Psi_f = f_0\,\Omega' + A'(f_1)\,\Omega' + \int A'(x_1)A'(x_2)\, f_2(x1,x_2)\, dx_1\, dx_2 + \cdots$$

dove la successione $f_0, f_1, \ldots \;= \{f\}$ appartiene alla classe di equivalenza $\bar{f}$. Si può poi dimostrare che la trasformazione V è unitaria, e che

$$U'(a,\Lambda) = V\, U(a,\Lambda)\, V^{-1}.$$

Per i particolari della dimostrazione si veda ancora [14], pag. 125.

Notiamo infine che la trasformazione unitaria V è unica; se esistesse infatti un'altra trasformazione $\bar{V}$ con le stesse proprietà di V, il prodotto $V^+\bar{V}$ commuterebbe con tutti gli operatori di una delle due teorie; ciò implicherebbe allora, per l'irriducibilità, che $V^+\bar{V}$ sia un numero, e precisamente: $V^+\bar{V} = e^{i\eta}$. Poiché d'altra parte $V^+\bar{V}$ lascia inalterato il vuoto (come vettore), segue che $V^+\bar{V} = 1$ e quindi $\bar{V} = V$.