Cap. 10 – Le conseguenze degli assiomi; simmetrie in una teoria secondo Wightman

Definizione di simmetria

Riprenderemo in questo capitolo il concetto di simmetria che abbiamo già introdotto nella prima parte (pag. 2–3).

Avevamo definito simmetria una corrispondenza tra stati che lascia invariate le probabilità di transizione. Grazie al teorema di Wigner (ed escludendo le trasformazioni antiunitarie) avevamo visto che una simmetria è realizzata da un operatore unitario, e avevamo inoltre messo in rilievo che una simmetria è fisicamente definita solo quando è assegnata la legge di trasformazione per le osservabili della teoria.

Daremo ora una definizione di simmetria in una teoria assiomatica di Wightman. Sia data una teoria, cioè uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, un vuoto Ω, una rappresentazione U del gruppo di Poincaré e gli operatori di campo A. Una trasformazione $\mathcal{T}$ dei campi A

$$A \overset{\mathcal{T}}{\mapsto} A'$$

è detta una simmetria se le funzioni di Wightman vengono lasciate invariate, cioè

$$(\Omega, A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)\,\Omega) = (\Omega, A_1'(x_1)\cdots A_n'(x_n)\,\Omega). \tag{10–1}$$

Prima di discutere più da vicino questa definizione, possiamo subito osservare che essa è nello spirito della definizione d'invarianza data nella prima parte: qui, assegnando in primo luogo la trasformazione $\mathcal{T}$ dei campi si specifica la trasformazione delle osservabili, come vedremo più esattamente tra poco; d'altra parte poiché, come apparirà evidente nel seguito, il vettore $A\,\Omega$ si trasforma sotto $\mathcal{T}$ in $A'\Omega$, si fissa una trasformazione tra stati, e imponendo che le funzioni di Wightman siano conservate si richiede la conservazione dei prodotti scalari.

Esaminiamo ora la nostra definizione d'invarianza. Ci si pone la domanda se gli operatori A', lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e il vuoto Ω danno luogo a una teoria alla Wightman. La risposta viene dal teorema di ricostruzione; osserviamo infatti che le funzioni

$$\mathcal{W}' = (\Omega, A_1'(x_1)\cdots A_n'(x_n)\,\Omega)$$

essendo uguali alle $\mathcal{W}$, che sono le funzioni di Wightman della teoria dalla quale siamo partiti, soddisfano tutte le proprietà di cui al Cap. 8, e quindi è possibile determinare una teoria che abbia le $\mathcal{W}'$ come funzioni di Wightman.

Una teoria che soddisfa a questo requisito è fornita dallo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, dal vuoto Ω e dagli operatori di campo A'. Un'altra teoria che ha ancora le $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ come funzioni di Wightman è la teoria dalla quale siamo partiti, quella cioè data dallo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, dal vuoto Ω e dagli operatori di campo A. Possiamo allora concludere che esiste ed è unico l'operatore unitario V che stabilisce l'equivalenza tra le due teorie, e cioè

$$A' = VAV^+ \tag{10–2}$$

$$V\Omega = \Omega. \tag{10–3}$$

Detta poi U la rappresentazione del gruppo di Poincaré nella teoria in cui compaiono gli operatori A, cioè

$$A(\Lambda x + a) = U A(x)\, U^+$$

la corrispondente rappresentazione nella teoria in cui compaiono gli operatori A' è

$$U' = VUV^+. \tag{10–4}$$

Infatti

$$A'(\Lambda x + a) = VA(\Lambda x + a)\, V^+ = VUA(x)\, U^+V^+ = U'A'(x)\, U^+$$

con $U' = VUV^+$.

Circa la trasformazione $\mathcal{T}$ dei campi è necessario mettere in rilievo che essa dev'essere definita in modo da conservare le leggi di composizione dell'algebra degli operatori A (cioè dev'essere un automorfismo):

$$\begin{gathered}(A+B)' = A' + B' \\ (AB)' = A'B'.\end{gathered}$$

Con questa precisazione rimangono giustificate le affermazioni fatte più sopra: assegnare la legge di trasformazione per le A implica assegnare le leggi di trasformazione per le osservabili della teoria (che si possono esprimere come prodotti di operatori di campo); inoltre al vettore $A\,\Omega$ corrisponde, come si era anticipato, il vettore $A'\Omega$, poiché $A \mapsto A' = VAV^+$ e $\Omega \mapsto V\Omega = \Omega$.

Simmetrie che commutano con le traslazioni temporali

Se oltre alla (10–1) imponiamo per la trasformazione $\mathcal{T}$ che

$$A(\vec{x}, t) = U(t)A(\vec{x}, 0)\, U(t)^+$$

implichi

$$A'(\vec{x}, t) = U(t)A'(\vec{x}, 0)\, U(t)^+ \tag{10–1$'$}$$

cioè richiediamo che la trasformazione "commuti" con le traslazioni temporali, nel senso che il diagramma seguente visualizza:

$$
\begin{array}{ccc}
A(\vec{x},0) & \overset{\mathcal{T}}{\longmapsto} & A'(\vec{x},0) \\
U(t)\Big\downarrow & & \Big\downarrow U(t) \\
A(\vec{x},t) & \overset{\mathcal{T}}{\longmapsto} & A'(\vec{x},t)
\end{array}
$$

segue immediatamente

$$VU(t) = U(t)\,V. \tag{10–5}$$

La relazione (10–5) traduce in forma algebrica la (10–1′); va notato espressamente che ciò è possibile in generale solamente quando si conosca l'esistenza dell'operatore V, che realizza la trasformazione $\mathcal{T}$; cosa che nel caso in esame è garantita dalla (10–1). La (10–5) assicura infine che V, commutando con $U(t)$, è una costante del moto.

Simmetrie non esatte nell'assiomatica di Wightman

Esamineremo ora un esempio che mostra quanto siano restrittive le condizioni imposte dagli assiomi di Wightman nel caso di simmetrie non esatte.

Consideriamo in primo luogo una trasformazione delle osservabili del tipo:

$$A_i \overset{\mathcal{T}}{\mapsto} A'_i; \quad A'_i(x) = D_{ij}A_j(x) \tag{10–6}$$

con

$$D_{ij} = \left(D^{-1}\right)_{ji} \quad \text{(ortogonalità).}$$

$\mathcal{T}$ è dunque una trasformazione locale che non riguarda le coordinate spazio-temporali, ma le sole variabili interne. Tale trasformazione, indipendente dal punto, commuta con le traslazioni spaziali e temporali, nel senso espresso dai diagrammi seguenti:

$$
\begin{array}{ccc}
A(\vec{x},0) & \overset{\mathcal{T}}{\longmapsto} & A'(\vec{x},0) \\
U(t)\Big\downarrow & & \Big\downarrow U(t) \\
A(\vec{x},t) & \overset{\mathcal{T}}{\longmapsto} & A'(\vec{x},t)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A(\vec{0},t) & \overset{\mathcal{T}}{\longmapsto} & A'(\vec{0},t) \\
U(\vec{x})\Big\downarrow & & \Big\downarrow U(\vec{x}) \\
A(\vec{x},t) & \overset{\mathcal{T}}{\longmapsto} & A'(\vec{x},t)
\end{array}
\tag{10–7}
$$

Nel caso che la $\mathcal{T}$ lasci invariate le funzioni $\mathcal{W}$, cioè sia una simmetria, essa è realizzata da un operatore unitario V che, come abbiamo visto in precedenza, è costante del moto. Perciò se la simmetria non è esatta, ciò può dipendere solo dalla non conservazione delle funzioni di Wightman: cioè non esiste un operatore unitario $V : A'_i = VA_iV^+$ che commuti con le traslazioni temporali $U(t)$.

A questo punto vi sono due alternative: o esiste un operatore unitario che realizza la trasformazione indotta da D_{ij} e tale operatore non commuta con le traslazioni temporali, cioè dipende dal tempo; oppure un operatore unitario che realizzi la trasformazione $\mathcal{T}$ non esiste.

La possibilità che esista un operatore unitario dipendente dal tempo che realizzi la trasformazione, suggerita dall'analogia con la meccanica quantistica ordinaria, si può giustificare considerando con un ragionamento euristico commutatori del tipo "canonico" a tempi uguali:

$$[A_i(\vec{x},0), A_j(\vec{y},0)] = i\, D_{ij}\, G(\vec{x}-\vec{y})$$

dove G è una funzione singolare la cui forma esplicita è inessenziale per le nostre considerazioni.

Se consideriamo il corrispondente commutatore

$$[A'_i(\vec{x},0), A'_j(\vec{y},0)]$$

esso per l'ortogonalità delle matrici D risulta uguale al commutatore dei corrispondenti operatori non accentati. Tale ragionamento può essere ripetuto per ogni istante t, e quindi ci si attende che esista per ogni istante un operatore $V(t)$ unitario che connetta gli A con gli A'.

L'operatore $V(t)$ è dato da

$$V(t) = U(t)V(0)U(t)^{+}$$

con

$$V(0)A_i(\vec{x},0)V(0) = A'_i(\vec{x},0).$$

Dimostriamo ora che $V(t)$, ammesso che esista, commuta con le traslazioni spaziali. Ciò accade perché la $\mathcal{T}$ commuta con le traslazioni spaziali nel senso del secondo diagramma (10–7); l'esistenza dell'operatore $V(t)$ permette allora di scrivere

$$V(0) = U(\vec{x})V(0)U(\vec{x})^{+} \quad \text{e quindi} \quad [V(t),\vec{P}] = 0.$$

Dimostriamo infine che $V(t)$, commutando con l'impulso, lascia invariato il vuoto Ω. Infatti:

$$\vec{P}V(t)\Omega = V(t)\vec{P}\,\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad V(t)\Omega = \Omega$$

(cfr. (8–2)).

Le funzioni di Wightman a tempi uguali sono dunque invarianti. A questo punto si sfrutta il teorema (4.17) di [14] — che non dimostriamo in generale, ma esamineremo tra poco in un caso particolare: esso garantisce che le funzioni di Wightman che contengono fino a quattro operatori di campo sono univocamente determinate dai loro valori a un tempo fissato. Segue così che sono invarianti le funzioni di Wightman che contengono fino a quattro operatori di campo.

Ora, tralasciando le funzioni a un campo, che si possono ricondurre a delle costanti inessenziali, consideriamo le funzioni di Wightman a due campi: esse sono in relazione con lo spettro di massa della teoria; le funzioni a tre campi sono in relazione con le costanti di accoppiamento, quelle a quattro campi con le ampiezze di scattering elastico.

Abbiamo così dimostrato che in una simmetria non esatta l'ipotesi dell'esistenza di un operatore unitario dipendente dal tempo che realizzi istante per istante la corrispondente trasformazione dei campi ha come conseguenza che la rottura della simmetria non può riguardare né le masse, né le costanti di accoppiamento, né le ampiezze di scattering elastico. [15]

Si vede dunque che in una teoria alla Wightman, diversamente che nell'ordinaria meccanica quantistica, non è in generale possibile descrivere una simmetria non esatta mediante un operatore $V(t)$ anche dipendente dal tempo. Analoghe e più forti restrizioni, che a prima vista non sembrerebbero necessarie, risulteranno nel seguito.