Cap. 14 – Rottura spontanea di una simmetria

Cenno sul modello di Nambu e Jona Lasinio

In questo capitolo discuteremo un problema che è in stretta connessione con quello delle rappresentazioni inequivalenti, e precisamente il problema delle simmetrie rotte spontaneamente.

Il concetto di rottura spontanea di una simmetria ha origine dalle trattazioni quantistiche dei problemi di molti corpi e dello stato solido in particolare. A tali questioni dedicheremo un esame più approfondito in un capitolo successivo.

In un secondo tempo problemi di rotture spontanee sono emersi da un lavoro di Nambu e Jona-Lasinio [19], i quali hanno tentato di sfruttare in teoria dei campi l'analogia con le teorie di molti corpi, allo scopo d'introdurre le particelle fisiche come "quasi particelle" di un campo fondamentale fermionico alla Heisenberg. [20]

Sia L una Lagrangiana invariante oltre che per il gruppo di Lorentz e per le trasformazioni di gauge, anche per la trasformazione T^5:

$$\psi \mapsto e^{i\alpha\gamma_5}\psi.$$

Una Lagrangiana di questo tipo è

$$L = \bar{\psi}\,\gamma_\mu\,\partial^\mu\psi + g\left[-(\bar{\psi}\,\gamma_5\,\psi)^2 + (\bar{\psi}\,\psi)^2\right]. \tag{14–1}$$

Dallo sviluppo della teoria si ottengono due tipi di soluzioni, cioè due insiemi di stati del sistema: gli stati di un tipo si possono ottenere da un "vuoto" Ω_0 ciclico e invariante per T^5 ; gli stati dell'altro tipo si ottengono da un altro "vuoto" Ω_m, non invariante per T^5. Si hanno così due spazi di Hilbert che risultano ortogonali l'uno all'altro: la situazione è analoga a quella delle rappresentazioni inequivalenti discussa nel Cap. 12.

In questo caso si verifica inoltre un fatto ancora più paradossale: e cioè l'esistenza di uno stato di vuoto Ω_m non invariante per la trasformazione T^5, mentre la Lagrangiana dalla quale tutta la teoria viene derivata è invariante per T^5.

Nambu e Jona Lasinio hanno poi provato che mentre lo spazio costruito a partire da Ω_0 e gli operatori relativi corrispondono a un campo fermionico a massa nulla, lo spazio costruito su Ω_m, e i relativi operatori, corrispondono a un campo fermionico di massa $m \neq 0$; di più si dimostra che quando esiste la soluzione Ω_m necessariamente esistono anche particelle pseudoscalari di massa nulla. [19]

Nello spirito del lavoro di Nambu e Jona Lasinio ciò portava a postulare, partendo dalla sola Lagrangiana L, particelle fermioniche di massa diversa da zero (nucleoni) e particelle pseudoscalari di massa nulla (che venivano interpretate come pioni).

Questo risultato però comporta sempre la difficoltà accennata sopra: rimane infatti da chiarire come sia possibile, partendo da una teoria invariante per T^5 (come dovrebbe essere quella relativa alla Lagrangiana L (14–1)) ottenere una teoria in cui compaiono dei "nucleoni" non invarianti per T^5.

Il modello di Goldstone

Per vedere più chiaramente la situazione, conviene discutere ora un modello più semplice, dovuto a Goldstone [21]. Dati due campi scalari hermitiani, si consideri la Lagrangiana:

$$L = \partial_\mu \varphi_1 \, \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2 \, \partial^\mu \varphi_2 - f(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \tag{14–2}$$

dove f è una generica funzione dell'argomento $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$. La (14–2), se f è una funzione lineare, rappresenta esattamente due campi liberi; in particolare se

$$f(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$$

L rappresenta due campi liberi di massa 2.

Notiamo anzitutto che in generale la Lagrangiana (14–2) è invariante per la trasformazione T:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\xmapsto{T} \varphi_1 \cos\alpha + \varphi_2 \sin\alpha \\ \varphi_2 &\xmapsto{T} \varphi_2 \cos\alpha - \varphi_1 \sin\alpha. \end{aligned} \tag{14–3}$$

Nel caso che $f(x)$ sia lineare in x, la trasformazione (14–3) ha un significato ben noto; se però f è non lineare, ha senso chiedersi quale sia la simmetria associata alla (14–3).

Sia in primo luogo $f(x)$ una funzione (definita per $x > 0$) sempre crescente, con $f'(x) > 0$, $f(0) = 0$.

Procederemo euristicamente considerando il nostro sistema come un sistema *classico* che descrive il moto, nel piano (φ_1, φ_2), di una particella soggetta al potenziale a simmetria radiale $f(x) = f(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$. Tale analogia apparirà giustificata nel seguito.

Per piccoli valori di x la $f(x)$ può essere approssimata mediante la sua derivata nell'origine $f'(0)$, cioè: $f(x) = x\, f'(0)$; $f'(0) > 0$. Il potenziale ha allora il minimo $= 0$ per $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Ciò fa prevedere, nel modello classico che abbiamo assunto, che i "piccoli spostamenti" di φ_1, φ_2 attorno allo zero per i quali l'approssimazione $f(x) = x\, f'(0)$ vale, diano luogo a oscillazioni *stabili*.

In termini quantistici, dobbiamo attenderci che per gli stati con non troppe particelle (corrispondenti a $\varphi_1, \varphi_2 \simeq 0$) la Lagrangiana sia ancora quella di due campi liberi (f risulta lineare), e che lo stato di minima energia sia lo stato di vuoto (con 0 particelle).

Proviamo ora che tali previsioni sono effettivamente verificate, e quindi che lo schema classico è plausibile. Nell'approssimazione in cui $f(x) = x\, f'(0)$, cioè

$$f(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\, f'(0) \tag{14–4}$$

le equazioni per i campi, derivate nel modo consueto dalla Lagrangiana (14–2), sono

$$\begin{aligned} \Box\varphi_1 &= \varphi_1\, f' \\ \Box\varphi_2 &= \varphi_2\, f' \end{aligned} \tag{14–5}$$

e con la sostituzione (14–4) diventano

$$\begin{aligned} \Box\varphi_1 &= \varphi_1\, f'(0) \\ \Box\varphi_2 &= \varphi_2\, f'(0). \end{aligned}$$

Dunque i campi soddisfano l'equazione di Klein–Gordon con massa $= \sqrt{f'(0)}$.

Sia $|0\rangle$ il vuoto, cioè lo stato invariante per traslazioni. Poiché

$$\Box\varphi_1 = [P_\mu, [P^\mu, \varphi_1]]$$

si ha

$$0 = \langle 0|\Box\varphi_1|0\rangle = \langle 0|\varphi_1\, f'|0\rangle.$$

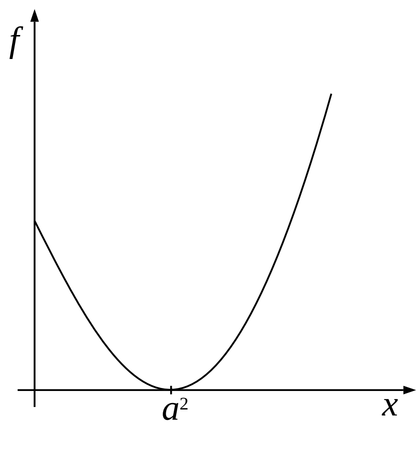
Ma nell'approssimazione fatta $f'(0)$ è un numero, indipendente da φ_1 e da φ_2; quindi, tenendo conto che $f'(0) > 0$, si ha

$$\langle 0|\varphi_1|0\rangle = 0$$

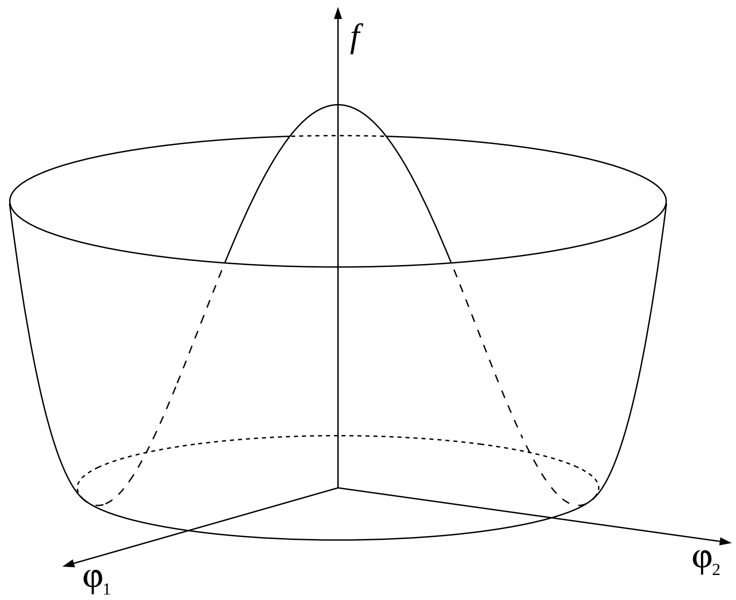
e analogamente

$$\langle 0|\varphi_2|0\rangle = 0.$$

Dunque φ_1 e φ_2 hanno valore nullo sul vuoto, il che è in accordo con la previsione del modello classico. Notiamo espressamente che il vuoto $|0\rangle$ così caratterizzato è invariante per le trasformazioni T.



Sia ora $f(x)$ una funzione con un andamento del tipo indicato in figura, e consideriamo anche in questo caso il modello classico analogo a quello usato dianzi; dal fatto che le piccole oscillazioni attorno allo zero non siano stabili si deduce che lo stato con $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ non corrisponde allo stato stazionario con energia più bassa, cioè al vuoto. Ci si attende invece che le oscillazioni stabili abbiano luogo attorno al punto di minimo, che chiameremo $x = a^2$. Evidentemente $f'(a^2) = 0$.



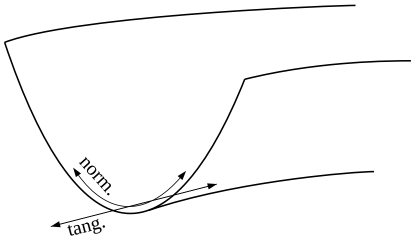
Sviluppando $f(x)$ in un intorno di a^2 si ha (avendo scelto $f(a^2) = 0$):

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, f''(a^2)\,\big(x - a^2\big)^2. \tag{14–6}$$

Ora al punto di minimo a^2 sull'asse x corrisponde, nel piano (φ_1, φ_2), una circonferenza C con centro l'origine e raggio uguale ad a: tutti i suoi punti sono di minimo per la funzione $f(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$, che possiamo allora sviluppare, ad esempio, nell'intorno del punto $(a, 0)$. Detti χ_1 e χ_2 gli incrementi infinitesimi di φ_1 e φ_2 rispettivamente, ciò equivale a porre

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\simeq a + \chi_1 \\ \varphi_2 &\simeq \chi_2. \end{aligned} \tag{14–7}$$

La funzione $f(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$, rappresentata dalla superficie in figura, ha una “gola” circolare i cui punti di minimo coincidono coi punti di minimo della funzione, e giacciono sulla circonferenza C. A partire da un punto di minimo, nella “gola” si possono compiere spostamenti lungo due direzioni ortogonali, ed entrambi gli spostamenti danno luogo a oscillazioni stabili. Per le direzioni di tali spostamenti, possiamo scegliere in particolare una direzione normale alla circonferenza C e una lungo la tangente a C; ed è evidente che i piccoli spostamenti di tipo normale (quelli che fanno “risalire” la gola) danno luogo a oscillazioni stabili proprie, mentre gli spostamenti tangenziali (che fanno rimanere nel “fondo” della gola) danno sì luogo a un moto stazionario, ma con periodo non definito: o, se vogliamo, a oscillazioni con costante di richiamo nulla.



La scelta di tali direzioni per gli spostamenti corrisponde alla scelta del punto $(a, 0)$ nel piano (φ_1, φ_2) per lo sviluppo di f, e cioè alla posizione fatta per φ_1 e φ_2 nelle (14–7).

Tornando alla trattazione del problema quantistico originario, ci si attende allora che, derivando le equazioni del moto dalla Lagrangiana (14–2) con la sostituzione (14–7) per le φ_1 e φ_2 si ottengano due soluzioni di campo libero: una a massa diversa da zero e una a massa uguale a zero. La previsione che le soluzioni siano di campo libero discende dalla (14–6) e dalla (14–7). In effetti, eseguendo il calcolo, si trova:

$$\begin{aligned} \Box\chi_1 &= af''(a)\,\chi_1 \\ \Box\chi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{14–8}$$

Sia $|\ \rangle_0$ lo stato a impulso nullo ("vuoto"): con un procedimento analogo a quello seguito per l'esempio precedente, si trova

$${}_0\langle\ |\chi_1|\ \rangle_0 = 0.$$

Tale caratterizzazione del vuoto *non* è però invariante per la trasformazione T (14–3). In effetti

$$\begin{aligned} \chi_1 &\mapsto \chi_1 \cos\alpha + \chi_2 \sin\alpha + a\,(\cos\alpha - 1) \\ \chi_2 &\mapsto \chi_2 \cos\alpha - \chi_1 \sin\alpha - a \sin\alpha \end{aligned}$$

e quindi:

$$0 = {}_0\langle\ |\chi_1|\ \rangle_0 \mapsto {}_0\langle\ |\chi_2|\ \rangle_0 \sin\alpha + a\,(\cos\alpha - 1) \neq 0.$$

Si vede che la soluzione generale per i campi è del tipo

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (a + \chi_1)\cos\vartheta + \chi_1 \sin\vartheta \\ \varphi_2 &= \chi_2 \cos\vartheta - (a + \chi_1)\sin\vartheta \end{aligned} \tag{14–9}$$

dove ϑ è un angolo arbitrario di rotazione nel piano (φ_1, φ_2): per tali rotazioni otteniamo, a partire dalle soluzioni che soddisfano la (14–8) e che corrispondono alla scelta $\vartheta = 0$ nella (14–9) (cfr. (14–7)), un'infinità continua di soluzioni, a ciascuna delle quali possiamo associare un "vuoto" non invariante per la trasformazione T (14–3).

Per spiegare questo risultato, che appare paradossale, cerchiamo in primo luogo di analizzare nei particolari il ragionamento che viene seguito correntemente quando ci si trova di fronte a una Lagrangiana invariante in forma per un'assegnata trasformazione dei campi.

Simmetrie e invarianza in forma della Lagrangiana

Data una Lagrangiana L invariante in forma, il teorema di Noether garantisce che esiste una quadricorrente conservata:

$$\begin{aligned} j_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\sigma,\mu}}\,\delta\varphi_\sigma \\ \partial^\mu j_\mu &= 0. \end{aligned} \tag{14–10}$$

Nel caso della Lagrangiana (14–2), poiché la (14–3) fornisce:

$$\delta\varphi_1 = \varphi_2, \quad \delta\varphi_2 = -\varphi_1$$

la corrente è

$$j_\mu = \varphi_2\,\partial_\mu\varphi_1 - \varphi_1\,\partial_\mu\varphi_2 \tag{14–11}$$

con $\partial^\mu j_\mu = 0$, come risulta dalla (14–5).

A questo punto si considera di solito la quarta componente j_0 di j_μ e si definisce la carica Q:

$$Q = \int d^3x\, j_0(\vec{x}, t) \tag{14–12}$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio a tre dimensioni. Grazie alla seconda delle (14–10), Q risulta in questo modo uno scalare per il gruppo di Lorentz, e indipendente dal tempo.

Si definisce successivamente l'operatore $U_\alpha = e^{i\alpha Q}$, che riesce unitario se Q è autoaggiunto; esso realizza le trasformazioni (14–3):

$$\varphi'_{1,2} = U_\alpha\,\varphi_{1,2}\,U_\alpha^+ \tag{14–13}$$

e si verifica facilmente che

$$[Q, \varphi_1] = -i\,\varphi_2 \qquad [Q, \varphi_2] = i\,\varphi_1. \tag{14–14}$$

Ammettendo che gli operatori Q e U_α esistano anche nella teoria quantistica dei campi che abbiamo sviluppato seguendo Wightman, se vogliamo che le (14–3) definiscano una simmetria le funzioni di Wightman devono restare invarianti; da ciò, poiché la legge di trasformazione per i campi è la (14–13), e U_α è unitario, segue che U_α lascia invariato il vuoto:

$$U_\alpha|0\rangle = |0\rangle \quad \text{ossia} \quad Q|0\rangle = 0. \tag{14–15}$$

D'altra parte nell'esempio dovuto a Goldstone abbiamo visto che il vuoto non risulta invariante per la trasformazione (14–3), che pure lascia invariante la Lagrangiana.

Appare allora chiaro che il ragionamento che conduce alla (14–15) partendo dall'invarianza della Lagrangiana (14–2) per le trasformazioni (14–3) non è corretto; e non è difficile rendersi conto che delle difficoltà sorgono già nella definizione della carica (14–12). In effetti, dal punto di vista matematico, $j_0(x)$ è una distribuzione, cioè ha significato l'integrale

$$\int d^3x\, j_0(\vec{x},t) f(\vec{x})$$

con $f(\vec{x})$ funzione di prova appartenente all'insieme $\mathcal{S}$ definito a pag. 8–3; palesemente la funzione $f(\vec{x}) = 1$ non è una funzione di $\mathcal{S}$, e quindi è in generale da attendersi che $\int d^3x\, j_0(\vec{x},t)$ non sia definito.

Si comprende invece che l'integrale esiste se l'integrazione viene estesa a un volume tridimensionale limitato W:

$$Q_W = \int_W d^3x\, j_0(\vec{x},t).$$

(Si osservi che $\int_W d^3x\, j_0(\vec{x},t)$ si può scrivere come $\int d^3x\, j_0(\vec{x},t) g(\vec{x})$, con g funzione caratteristica di W; e $g(\vec{x})$ può essere approssimata mediante funzioni di $\mathcal{S}$.) Evidentemente Q_W dipende dal tempo: da $\partial^\mu j_\mu = 0$ non si può dedurre $\dot{Q}_W = 0$, poiché il volume W ha estensione finita.

Dimostreremo ora che le (14–14) valgono, con le restrizioni che vedremo, anche per gli operatori Q_W. In primo luogo proviamo che:

$$[Q_W(t), \varphi_1(\vec{x},t)] = -i\, \varphi_2(\vec{x},t) \quad \text{se} \quad \vec{x} \in W. \tag{14–16}$$

Infatti, essendo

$$j_0(\vec{x},t) = \varphi_2(\vec{x},t)\, \dot{\varphi}_1(\vec{x},t) - \varphi_1(\vec{x},t)\, \dot{\varphi}_2(\vec{x},t)$$

si ha:

$$[Q_W(t), \varphi_1(\vec{x},t)] = \int_W d^3x' \left[\varphi_2(\vec{x}',t)\, \dot{\varphi}_1(\vec{x}',t) - \varphi_1(\vec{x}',t)\, \dot{\varphi}_2(\vec{x}',t), \varphi_1(\vec{x},t)\right]$$

e sfruttando le regole di commutazione a tempi uguali per i campi :

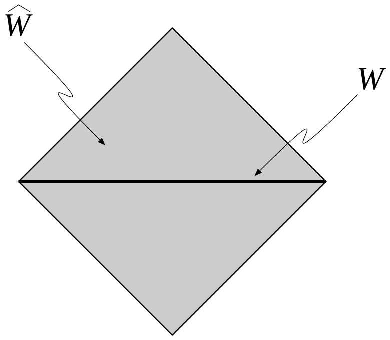
$$[\varphi_i(\vec{x},t), \dot{\varphi}_j(\vec{x}',t)] = i\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

si ottiene

$$[Q_W(t), \varphi_1(\vec{x},t)] = -i \int_W d^3x'\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')\, \varphi_2(\vec{x}',t) = -i\, \varphi_2(\vec{x},t) \quad \text{se} \quad \vec{x} \in W. \tag{14–17}$$

Quindi la (14–16) risulta provata; in modo analogo si prova

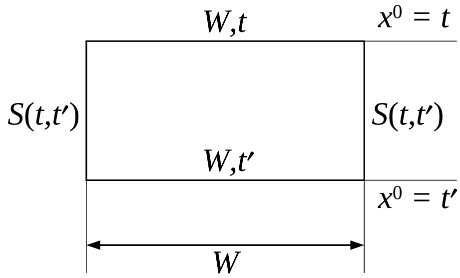
$$[Q_W(t), \varphi_2(\vec{x},t)] = i\, \varphi_1(\vec{x},t) \quad \text{se} \quad \vec{x} \in W. \tag{14–18}$$



Dimostriamo ora che le relazioni di commutazione (14–17) e (14–18) valgono anche a tempi diversi, e precisamente: per ogni W esiste un sottoinsieme dello spazio-tempo in cui valgono le

$$\begin{aligned} [Q_W(t), \varphi_1(\vec{x}, t')] &= -i\, \varphi_2(\vec{x}, t') \\ [Q_W(t), \varphi_2(\vec{x}, t')] &= \quad i\, \varphi_1(\vec{x}, t'). \end{aligned} \tag{14–19}$$

Premettiamo una definizione; dato un volume tridimensionale W dicesi *ombra causale* di W l'insieme $\widehat{W}$ dei punti dello spazio-tempo causalmente disgiunti da tutti i punti causalmente disgiunti da W.

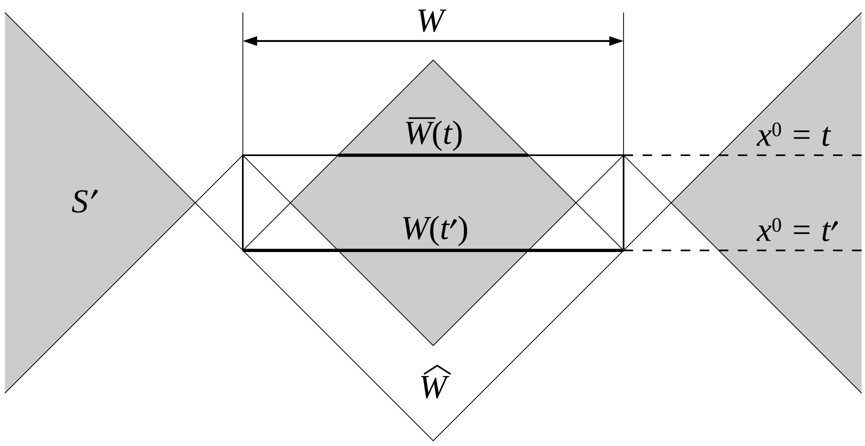


Dato il volume tridimensionale W al tempo $x^0 = t'$, rappresentato nella nostra figura bidimensionale da un segmento sulla retta $x^0 = t'$, consideriamo il volume $W(t)$, "parallelo" nello spazio-tempo al volume W; allora poiché $\partial^\mu j_\mu = 0$ il teorema di Gauss assicura che all'operatore

$$Q_W(t') - Q_W(t) = \int\limits_W d^3x\, j_0(\vec{x}, t') - \int\limits_W d^3x\, j_0(\vec{x}, t)$$

contribuisce solamente un termine dovuto alla superficie laterale $S(t, t')$ del cilindro avente per basi (W, t'), (W, t).

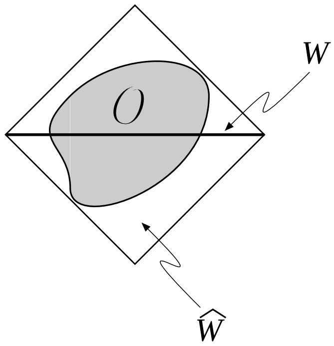
Segue allora che $Q_W(t') - Q_W(t)$ commuta con tutti i campi definiti nell'insieme S' dei punti causalmente disgiunti da $S(t, t')$; in particolare, poiché siamo interessati ai campi definiti per $\vec{x} \in W$, all'istante $x^0 = t$, si vede che $Q_W(t') - Q_W(t)$ commuta coi campi con $\vec{x} \in \overline{W}(t)$, dove $\overline{W}(t) = W(t) \cap S'$.



Poiché l'insieme unione dei $\overline{W}(t)$ al variare di t è l'ombra causale $\widehat{W}$ di W:

$$\bigcup_t \overline{W}(t) = \widehat{W}$$

si può concludere che, valendo la (14–16), la prima delle (14–19) è dimostrata per ogni $x = (\vec{x}, t)$ di W.



Ma dato un insieme limitato $\mathcal{O}$ dello spazio-tempo, esiste sempre un volume tridimensionale W tale che la sua ombra causale contenga $\mathcal{O}$; allora si vede che esiste W in modo che Q_W fornisca le relazioni di commutazione (14–19) con $(\vec{x}, t), (\vec{x}, t') \in \mathcal{O}$.

Ciò garantisce che per ogni algebra dei polinomi $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ esiste un operatore unitario U_W che realizza la corretta trasformazione d'invarianza corrispondente alla (14–3).

Poiché d'altronde l'operatore U (14–13) non fornisce la corretta trasformazione dei campi (non lascia invariato il vuoto), è prevedibile che non esistano i limiti

$$\lim_{W \to \mathbb{R}^3} Q_W \qquad \lim_{W \to \mathbb{R}^3} U_W .$$

Tuttavia sarebbe erroneo dedurre che la rottura spontanea della simmetria dipenda essenzialmente dalla non esistenza di questi limiti. In effetti, con un procedimento analogo a quello che ha portato alla definizione dell'operatore Q_W corrispondentemente alla scelta di una funzione del tipo indicato in figura, è possibile definire un operatore $\bar{Q}_W$, in corrispondenza alla scelta di una funzione f sempre crescente nella Lagrangiana (14–2). E sebbene nel caso di f sempre crescente, come si è provato a pag. 14–3, non si abbia rottura della simmetria, è possibile provare che $\lim \bar{Q}_W$ non esiste (neppure nella topologia debole).(1)

Il modello di Guralnik

C'è in effetti una ragione più profonda che distingue una simmetria esatta da una simmetria rotta spontaneamente, indipendentemente dal fatto che l'operatore U si possa ottenere come limite di un operatore U_W. Una simmetria esatta è caratterizzata dall'invarianza delle funzioni di Wightman: è allora garantita l'esistenza di un operatore U che realizza la trasformazione, e U lascia invariante il vuoto. Se c'è una rottura spontanea, il vuoto non è invariante, e poiché conseguentemente le funzioni di Wightman non sono invarianti, non si può dedurre l'esistenza dell'operatore U.

Per chiarire meglio questa situazione esamineremo un esempio semplice, dovuto a Guralnik [22], che ha il vantaggio di essere esattamente risolubile.(2)

(1) Per il concetto di limite debole si veda pag. 15–3.

(2) Contrariamente al modello di Goldstone, risolubile, come abbiamo visto, solo approssimativamente.

Sia L la Lagrangiana di un campo libero hermitiano di massa nulla:

$$L = \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu \partial^\mu \varphi.$$

Questa Lagrangiana è invariante per le trasformazioni

$$\varphi(x) \mapsto \varphi(x) + \eta, \ \text{ con } \eta \text{ costante.} \tag{14–20}$$

La corrente, calcolata in base alla prima delle (14–10), è

$$j_\mu = \partial_\mu \varphi.$$

La carica risulta

$$Q = \int d^3x\, j_0(\vec{x}, t) = \int d^3x\, \dot{\varphi} \tag{14–21}$$

e soddisfa la relazione di commutazione

$$[Q, \varphi] = -1,$$

relazione analoga al commutatore canonico $[p, q] = -i$; in effetti Q, ammesso che esista, genera “traslazioni” del campo:

$$e^{i\eta Q} \varphi(x) e^{-i\eta Q} = \varphi(x) + \eta.$$

Tuttavia Q non esiste, poiché l'integrale (14–21) diverge, come si può verificare per esercizio. A prescindere però dall'esistenza di Q com'è definito nella (14–21), ci si può chiedere se sia possibile definire un operatore Q, o, equivalentemente, un operatore U tale che

$$U\varphi(x)\, U^+ = \varphi(x) + \eta.$$

Tale operatore U, se esiste, commuta con le traslazioni spaziali e temporali, cioè $[U, P^\mu] = 0$. Quindi $P^\mu U|0\rangle = UP^\mu|0\rangle = 0$; cioè P^μ annichila $U|0\rangle$, e per la (8–2) di pag. 8–2 si ha

$$U|0\rangle = |0\rangle, \quad U^+|0\rangle = |0\rangle.$$

Segue allora:

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = \langle 0|U^+ U\varphi\, U^+ U|0\rangle = \langle 0|U\varphi\, U^+|0\rangle = \langle 0|\varphi|0\rangle + \eta.$$

Ouest'ultima relazione è assurda, tranne il caso banale $\eta = 0$; si conclude allora che a prescindere dal procedimento col quale avevamo tentato di dedurre U dal teorema di Noether, U *non esiste.* In questo modo si è visto esplicitamente che anche se la Lagrangiana è invariante, *può non esserci simmetria*: ciò accade ogni volta che i valori medi sul vuoto non sono conservati.

Automorfismi spaziali (implementable) e non

Esprimiamo ora i risultati ottenuti in linguaggio matematico. Le trasformazioni che lasciano invariante la Lagrangiana sono automorfismi dell'algebra (astratta) degli operatori, dovendo conservare le relazioni algebriche (relazioni di commutazione ed equazioni del moto); possiamo distinguere allora gli automorfismi di un'algebra in automorfismi *spaziali* (nella letteratura inglese detti anche "implementable") e *non spaziali*, a seconda che ammettano o non ammettano rappresentazioni unitarie sullo spazio di Hilbert supporto di una determinata rappresentazione dell'algebra.

Possiamo così dire che le trasformazioni (14–3) e (14–20) sono automorfismi non spaziali dell'algebra degli operatori, poiché, come abbiamo fatto osservare, non esiste un operatore unitario che le realizzi nello spazio di Hilbert che è stato assunto a base delle nostre considerazioni.