# CAPITOLO 8

## Geodetiche radiali della geometria di Schwarzschild

Cominciamo ora lo studio delle geodetiche di tipo tempo della geometria di Schwarzschild, partendo dal caso più semplice: le geodetiche radiali. Intendiamo con questo geodetiche lungo le quali restano costanti le coordinate $\vartheta$, $\varphi$.

Che tali geodetiche debbano esistere, è ovvio per ragioni di simmetria: se facciamo partire una geodetica da un punto A qualsiasi, con vettore tangente le cui componenti $u^\vartheta$ e $u^\varphi$ sono nulle, ossia tale che $d\vartheta/d\lambda = d\varphi/d\lambda = 0$, "non c'è ragione" che la curva debba piegare da una parte o dall'altra. La frase messa fra virgolette sta a indicare un argomento che andrebbe reso rigoroso, e lo si può fare sfruttando due fatti:

– l'invarianza della metrica per rotazioni, in particolare attorno alla retta che unisce l'origine O delle coordinate al punto A
– l'unicità della geodetica di dato punto iniziale e dato vettore tangente iniziale.

Applichiamo dunque alle geodetiche radiali di tipo tempo nella geometria di Schwarzschild le proprietà che abbiamo visto al Cap. 6. La lagrangiana è:

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{r-1}{r}\,\dot{t}^{\,2} - \frac{r}{r-1}\,\dot{r}^2\right)$$

dove $\dot{t}$, $\dot{r}$ sono le derivate rispetto al parametro affine $\lambda$, che poi identificheremo con $\tau$. Le costanti del moto sono:

$$2W = \frac{r-1}{r}\,\dot{t}^{\,2} - \frac{r}{r-1}\,\dot{r}^2 = 1 \tag{8–1}$$

$$E = p_t = \frac{\partial W}{\partial \dot{t}} = \frac{r-1}{r}\,\dot{t}. \tag{8–2}$$

Come abbiamo visto alla fine del Cap. 6, la (8–1) identifica $\lambda$ con $\tau$. Combinando (8–1) e (8–2) si ottiene subito

$$\dot{r}^2 = E^2 - 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \tag{8–3}$$

dove si è posto

$$r_0 = \frac{1}{1-E^2}\,. \tag{8–4}$$

È interessante osservare che la (8–3) è la stessa equazione che si ottiene dalla conservazione dell'energia nella meccanica newtoniana. Se infatti il grave parte da fermo in $r = r_0$, la sua energia iniziale è $-GMm/r_0$, e va eguagliata all'energia durante il moto, che vale $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - GMm/r$. Dunque

$$\dot{r}^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Ci sono però due importanti differenze:

- mentre in meccanica newtoniana $r$ è la distanza dal centro, nella geometria di Schwarzschild questo non è vero
- nella (8–3) $\dot{r}$ significa derivata rispetto al tempo proprio $\tau$, mentre in meccanica newtoniana il tempo è uno solo (assoluto).

La (8–3) si può integrare tramite la variabile ausiliaria $\eta$:

$$r = \tfrac{1}{2}\,r_0\,(1 + \cos\eta) \qquad \tau = \tfrac{1}{2}\,r_0^{3/2}\,(\eta + \sin\eta). \tag{8–5}$$

Le relazioni precedenti hanno senso solo per $E < 1$, e mostrano che in tal caso $r$ raggiunge un massimo pari a $r_0$. Si vede anche che:

1) Per $\eta = 0$ si ha $r_0 = 0$, mentre per $\eta = \pi$ si ha $r = 0$.
2) Il tempo (proprio) di caduta da $r = r_0$ a $r = 0$ è finito, e vale $\frac{1}{2}\pi\,r_0^{3/2}$. L'espressione è la stessa della meccanica newtoniana, con le avvertenze già fatte.

Se si fa il caso limite di piccola velocità ($|\dot{r}| \ll 1$) e campo debole ($r \gg 1$) dalla (8–3) si ricava

$$E = 1 + \tfrac{1}{2}\,\dot{r}^2 - \frac{1}{2r}.$$

L'interpretazione di questa equazione è immediata. $E$ rappresenta l'energia per unità di massa del corpo che cade: il termine 1 è la massa di riposo, il successivo è l'energia cinetica, e il terzo l'energia potenziale (si ricordi che $G = 1$, $2M = 1$).

Ci riuscirà utile in seguito il caso $E = 1$: come mostra la (8–4), esso rappresenta la caduta dall'infinito. Il vantaggio di questo caso è che le formule sono molto più semplici. Si verifica facilmente

$$r = s^2 \qquad \tau = -\tfrac{2}{3}s^3 \tag{8–6}$$

$$t = -\tfrac{2}{3}s^3 - 2s + \ln\frac{s+1}{|s-1|} \tag{8–7}$$

dove abbiamo introdotto una nuova variabile ausiliaria $s$, e scelto le origini di $\tau$ e $t$ alla fine della caduta ($r = 0$). Un'espressione per $t$ avrebbe dovuto essere scritta anche nel caso $E < 1$, ma sarebbe riuscita assai complicata.

La singolarità delle coordinate di Schwarzschild appare evidente nella (8–7): per $s \to 1$, sebbene non vi sia alcuna singolarità nel moto, $t \to \infty$.

**Luce emessa da una sorgente in caduta libera**

Vogliamo ora discutere il seguente problema. Una sorgente puntiforme di luce, che emette in modo costante e isotropo nel suo rif. tangente, cade radialmente, provenendo dall'infinito. La luce viene ricevuta da un telescopio situato in una postazione fissa, nella stessa direzione radiale, alla coordinata $r = R \gg 1$. Come varia nel tempo l'intensità della luce ricevuta?

Cominciamo studiando la propagazione radiale della luce. Dalla (7–1) con $d\varphi/d\lambda = 0$ si ottiene subito

$$dt = \pm \frac{r\,dr}{r-1}$$

che integrata dà

$$t = r + \ln(r-1) + \text{cost.} \tag{8–8}$$

(è stato scelto il segno + relativo alla luce uscente).

Consideriamo ora un evento di emissione, alle coordinate $(t_\mathrm{e}, r_\mathrm{e})$, e sia $t_\mathrm{r}$ la coordinata temporale dell'evento ricezione. Dalla (8–8) abbiamo

$$t_\mathrm{r} - R - \ln(R-1) = t_\mathrm{e} - r_\mathrm{e} - \ln(r_\mathrm{e} - 1)$$

dove $r_\mathrm{e}$ e $t_\mathrm{e}$ sono dati dalle (8–6) e (8–7). Sostituendo (per $s > 1$):

$$t_\mathrm{r} = -\tfrac{2}{3}s^3 - s^2 - 2s - 2\ln(s-1) + R + \ln(R-1).$$

Per $s \to 1$ questa porta a

$$t_\mathrm{r} \to -2\ln(s-1) + \text{cost.}$$

da cui

$$s \to 1 + a\,e^{-t_\mathrm{r}/2}. \tag{8–9}$$

Differenziando la (8–9) e la seconda delle (8–6):

$$\frac{dt_\mathrm{r}}{d\tau} \to \frac{1}{a}\,e^{t_\mathrm{r}/2}. \tag{8–10}$$

*Attenzione*: Qui $\tau$ indica il tempo proprio della sorgente, mentre il tempo proprio del ricevitore può essere identificato con $t_\mathrm{r}$, stante l'ipotesi $R \gg 1$.

La (8–10) mostra due effetti:

– Un redshift che va come $e^{-t_\mathrm{r}/2}$. Questo discende da due cause: l'aumento di velocità della sorgente (effetto Doppler), e il redshift gravitazionale.
– Un rallentamento nel ritmo di ricezione dei fotoni, con lo stesso fattore. Questo perché il numero di fotoni emessi nel tempo $d\tau$ vengono ricevuti nel tempo $dt_\mathrm{r}$, che è più lungo.

Abbiamo dunque la risposta: infatti l'energia trasportata da ciascun fotone si riduce in proporzione al redshift, ossia per un fattore $e^{-t_\mathrm{r}/2}$, e inoltre il ritmo di arrivo dei fotoni si abbassa nello stesso rapporto. Dunque l'intensità, quando $s \to 1$, ossia quando la sorgente si avvicina all'orizzonte, decresce come $e^{-t_\mathrm{r}}$. Si noti che l'intensità della luce non si annulla mai, sebbene il tempo (proprio) di caduta della sorgente oltre l'orizzonte sia finito.

**Correzione per l'angolo solido**

Tuttavia il calcolo così eseguito contiene un errore: studiando la sola propagazione radiale, non abbiamo tenuto conto che per una data area del ricevitore l'angolo solido alla sorgente varia durante la caduta. Dobbiamo dunque tornare alla propagazione non radiale. Però possiamo supporre che il telescopio sia molto piccolo rispetto alla sua distanza, il che vuol dire propagazione quasi radiale, ossia con $b \ll 1$. Allora la (7–3) ci dice $dr/d\lambda \simeq 1$, e la seconda delle (7–2) diventa

$$\frac{d\varphi}{dr} \simeq \frac{b}{r^2}.$$

da cui

$$\varphi = -\frac{b}{r} + \mathrm{cost.}$$

La costante si determina ponendo $\varphi = 0$ alla partenza ($r = r_\mathrm{e}$) e infine

$$\varphi = b\left(\frac{1}{r_\mathrm{e}} - \frac{1}{r}\right). \tag{8–11}$$

Cerchiamo ora l'angolo $\alpha$ che un raggio di luce che arriva al bordo del telescopio forma alla partenza con la direzione radiale (fig. 8–1). Considerando un trattino lungo $dl$ della traiettoria (fig. 8–2) si ha

$$\alpha = r_\mathrm{e}\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_\mathrm{e} = \frac{b}{r_\mathrm{e}}\left(\frac{dr}{dl}\right)_\mathrm{e} = \frac{b}{r_\mathrm{e}}\sqrt{\frac{r_\mathrm{e}-1}{r_\mathrm{e}}}$$

e l'angolo solido in cui viene emessa la luce:

$$\omega = \pi\alpha^2 = \pi b^2\,\frac{r_\mathrm{e}-1}{r_\mathrm{e}^3}. \tag{8–12}$$

In un punto lontano ($r = R \gg 1$) avremo dalla (8–11) $\varphi_{\rm r} = b/r_{\rm e}$; l'area del ricevitore sarà

$$A = \pi R^2 \varphi_{\rm r}^2 = \pi R^2 \,\frac{b^2}{r_{\rm e}^2}$$

e questa, combinata con la (8–12), ci dà

$$\omega = \frac{A}{R^2}\,\frac{r_{\rm e} - 1}{r_{\rm e}}.$$

Fissata $A$, l'intensità ricevuta va come l'angolo solido di emissione, ossia è proporzionale a

$$\frac{r_{\rm e} - 1}{r_{\rm e}} \simeq s^2 - 1 \simeq 2a\, e^{-t_{\rm r}/2}$$

(stiamo studiando l'andamento limite, vicino all'orizzonte, dove $r_{\rm e} \to 1$).

### Effetto del moto della sorgente

Il calcolo così eseguito per l'angolo solido vale però per una sorgente ferma; per una sorgente in moto manca ancora un fattore $(1-v)/(1+v)$, se $v$ è la velocità della sorgente rispetto a un riferimento fermo nelle coordinate di Schwarzschild.

Si tratta di un problema di RR: se consideriamo un fotone che viene emesso dalla sorgente, nel suo riferimento di quiete, con componenti $p'_x$, $p'_y$ dell'impulso, e se la sorgente si muove rispetto al "laboratorio" con velocità $v$ nel verso negativo dell'asse $x$, le componenti dell'impulso nel laboratorio sono

$$p_x = \gamma\,(p'_x - vE'), \qquad p_y = p'_y.$$

A noi interessa luce emessa in direzione poco diversa dall'asse $x$, per cui $p'_y \ll p'_x$ e quindi $E' \simeq p'_x$. Allora

$$\frac{p_y}{p_x} \simeq \frac{p'_y}{\gamma(1-v)\,p'_x}.$$

Poiché l'angolo $\alpha$ con l'asse $x$ è piccolo, possiamo scrivere $p_y/p_x \simeq \alpha$, $p'_y/p'_x \simeq \alpha'$ e quindi

$$\alpha' \simeq \gamma(1-v)\,\alpha = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\,\alpha.$$

Per l'angolo solido $\omega = \pi\alpha^2$ troviamo

$$\omega' = \frac{1-v}{1+v}\,\omega$$

come avevamo asserito. L'intensità della luce ricevuta si riduce per tale fattore, e occorre solo calcolare $v$.

Per il calcolo bisogna avere ben chiaro il significato di $v$: si tratta della velocità della sorgente, misurata in un laboratorio *fermo nelle coordinate di Schwarzschild*. La misura verrà fatta con metri e orologi del laboratorio, e occorre perciò connettere lunghezze e tempi del laboratorio con le coordinate di Schwarzschild.

Per la lunghezza avremo, dall'espressione della metrica, e sapendo che varia soltanto $r$:

$$dl = \sqrt{\frac{r}{r-1}}\,dr.$$

Per il tempo, analogamente:

$$d\tau = \sqrt{\frac{r-1}{r}}\,dt$$

(qui $d\tau$ significa il tempo segnato da un orologio *fermo nel laboratorio*). Mettendo insieme:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{r}{r-1}\,\frac{dr}{dt}.$$

Basta ora far uso delle (8–6), (8–7), che danno le equazioni parametriche della geodetica percorsa dalla sorgente. Oppure, più semplicemente: ricavare $\dot{r}$ dalla (8–3) con $r_0 \to \infty$ e $\dot{t}$ dalla (8–2) con $E = 1$. A conti fatti si ottiene:

$$v = \frac{1}{\sqrt{r_{\mathrm{e}}}} = \frac{1}{s}.$$

È interessante osservare che questo è esattamente lo stesso risultato che si otterrebbe col calcolo newtoniano.

Usando la (8–9) si vede che il nuovo fattore correttivo (per $s \to 1$) vale $\frac{1}{2}a\exp(-t_{\mathrm{r}}/2)$. Mettendo insieme le due correzioni per l'angolo solido, si ottiene un fattore che va come $\exp(-t_{\mathrm{r}})$, e perciò in totale

$$I_{\mathrm{r}} \sim e^{-2t_{\mathrm{r}}}.$$

Concludendo: l'intensità cade esponenzialmente, con una costante di tempo $1/2$.

Occorre ora ricordare qual è l'unità di tempo adottata: dato che abbiamo posto $2M = 1$, la nostra unità di lunghezza vale ad es. circa $3\,\mathrm{km}$ per $M = M_\odot$. L'unità di tempo è il tempo che la luce impega a percorrere questo spazio, ossia $10\,\mu$s: pertanto la costante di tempo con cui decade l'intensità della luce ricevuta vale $5\,\mu$s.

Dunque da un lato è vero che la luce non si annulla mai, ma dall'altro il decadimento è rapidissimo, se la massa che genera la geometria è una tipica massa stellare. La nostra sorgente scomparirebbe del tutto in molto meno di un millisecondo!

### Il moto di un pianeta

Vogliamo ora studiare il moto non radiale di un corpo di massa non nulla, ma molto piccola rispetto a $M$, in modo da poterci ancora ridurre alla ricerca delle geodetiche di tipo tempo. Per la lagrangiana si ha:

$$2W = \frac{r-1}{r}\,\dot{t}^2 - \frac{r}{r-1}\,\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 = 1 \tag{8–13}$$

e valgono ancora le costanti del moto (7–2):

$$\frac{r-1}{r}\,\dot{t} = E \qquad r^2\dot{\varphi} = J \tag{8–14}$$

(ora e in seguito il punto indica derivata rispetto a $\tau$).

Sostituendo le (8–14) nella (8–13) si trova

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right). \tag{8–15}$$

Questa potrebbe essere in linea di principio integrata per fornire $r$ in funzione di $\tau$, ma non è ciò che c'interessa. È più importante ottenere la traiettoria, ossia $r$ in funzione di $\varphi$.

Ma prima di procedere, mostriamo un altro risultato interessante: *nel caso di orbite circolari, vale ancora la terza legge di Keplero.* Dobbiamo in primo luogo trovare le condizioni per un'orbita circolare.

Per questo basta ricordare come abbiamo ragionato nel cap. precedente, per un'equazione analoga alla (8–15): abbiamo interpretato l'equazione come la conservazione dell'energia per il moto unidimensionale in un potenziale, che nel nostro caso è

$$V(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right).$$

Il moto circolare si avrà per quel raggio che annulla $V'(r)$, e a conti fatti si trova la relazione

$$J^2 = \frac{r^2}{2r-3}.$$

Inoltre nel moto circolare $\dot{r} = 0$, quindi la (8–15) dice

$$E^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right) = \frac{2\,(r-1)^2}{r\,(2r-3)}.$$

Usiamo ora le (8–14) per calcolare $d\varphi/dt$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r-1}{r^3}\,\frac{J}{E} = \frac{1}{\sqrt{2r^3}} \tag{8–16}$$

e questa è appunto la terza legge di Keplero. Si noti infatti che $d\varphi/dt$ è la velocità angolare come verrebbe misurata da un osservatore lontano. Però nella (8–16) compare $r$, che può essere inteso come raggio dell'orbita solo con le cautele che sappiamo circa l'interpretazione della coordinata $r$ di Schwarzschild.

### Equazione della traiettoria

Per determinare la dipendenza di $r$ da $\varphi$ su un'orbita non circolare, basta sostituire nella (8–15)

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{J}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi}$$

e si arriva a

$$\frac{J^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right). \tag{8–17}$$

Purtroppo la (8–17) non è integrabile con funzioni elementari, per cui bisognerà ricorrere ancora una volta ad approssimazioni, che ovviamente dipendono dal particolare problema che si ha di fronte.

Per procedere, trasformiamo la (8–17) di nuovo con la sostituzione $r = J/u$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = E^2 - 1 + \frac{u}{J} - u^2 + \frac{u^3}{J}.$$

Derivando questa rispetto a $\varphi$ e cancellando la derivata prima troviamo

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{2J} - u + \frac{3}{2J}\,u^2. \tag{8–18}$$

Se si potesse trascurare completamente il terzo termine a secondo membro nella (8–18), si avrebbe per $u$ un andamento sinusoidale:

$$u = \frac{1}{2J} + q\cos\varphi$$

dove $q$ è una costante arbitraria. Conviene porre $q = e/2J$, e si ottiene

$$u = \frac{1}{2J}\,(1 + e\cos\varphi)$$

da cui

$$r = \frac{2J^2}{1 + e\cos\varphi}.$$

Confrontando questa con l'equazione polare dell'ellisse di semiasse maggiore $a$ ed eccentricità $e$

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi}$$

si vede che siamo ricaduti in un'orbita kepleriana, con $2J^2 = a\,(1 - e^2)$.

Ciò dimostra che il terzo termine nella (8–18) rappresenta gli effetti di RG che stiamo cercando, e non possiamo quindi trascurarlo.

**La precessione del perielio dei pianeti**

Già a metà dell'800 era stato osservato da LeVerrier che Mercurio aveva un comportamento anomalo: una precessione del perielio superiore a quella che si poteva calcolare in base alla perturbazione dovuta agli altri pianeti. Il residuo era $43''$ per secolo, e rimase inspiegato — nonostante numerose ipotesi e tentativi — fino al 1915, quando Einstein mostrò che era necessaria conseguenza della RG.

Dato che siamo in cerca di una precessione, tenteremo una soluzione per la (8–18) del tipo

$$u = \bar{u}\,(1 + e\cos k\varphi). \tag{8–19}$$

Il significato della (8–19) è il seguente. Se fosse $k = 1$ avremmo un'ellisse di eccentricità $e$ e semiasse maggiore legato a $\bar{u}$ da

$$\frac{J}{\bar{u}} = a\,(1 - e^2).$$

Il fatto che $k$ possa essere diverso da 1 s'interpreta pensando a un'ellisse che "ruota," e che perciò non si chiude. Infatti $u$ (e quindi $r$) è funzione periodica di $\varphi$, ma con periodo $2\pi/k$; perciò quando il pianeta compie un giro la sua distanza dal Sole non torna la stessa: questo accade dopo più di un giro se $k < 1$, dopo meno di un giro se $k > 1$.

Sostituendo la (8–19) nella (8–18) e uguagliando i termini indipendenti da $\varphi$ si trova

$$1 - 2J\bar{u} + 3\bar{u}^2 = 0$$

che dà la relazione fra $\bar{u}$ e $J$; ma questa non c'interessa. Invece dai termini in $\cos k\varphi$ si ottiene

$$k^2 = 1 - \frac{3\,\bar{u}}{J} = 1 - \frac{3}{a\,(1 - e^2)}.$$

Introduciamo lo scostamento $\Delta\varphi$ del periodo radiale da $2\pi$:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{k} - 1\right) = 2\pi\left[\left(1 - \frac{3}{a\,(1 - e^2)}\right)^{-1/2} - 1\right] \simeq \frac{3\pi}{a\,(1 - e^2)} \tag{8–20}$$

se $a \gg 1$, come accade per i pianeti. Dunque a ogni giro il perielio del pianeta *avanza di* $\Delta\varphi$ dato dalla (8–20). Per il confronto con le osservazioni occorre però ripristinare le unità ordinarie, il che si fa considerando che $\Delta\varphi$ è un angolo, mentre $a$ è una lunghezza. Bisogna quindi moltiplicare per una lunghezza, che è $2M$ in unità geometriche, ma $2GM/c^2$ in unità ordinarie:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a\,(1 - e^2)}. \tag{8–21}$$

Einstein ottenne la (8–21), con un procedimento diverso da quello che abbiamo usato qui, il 18 novembre 1915. La sua teoria risolveva il problema della precessione, senza far ricorso a parametri arbitrari, ma solo a grandezze osservabili già misurate.

Poiché l'avanzamento in un giro è inversamente proporzionale ad $a$, mentre il periodo del pianeta va come $a^{3/2}$ (terza legge di Keplero) l'effetto in un dato intervallo di tempo va come $a^{-5/2}$. È dunque massimo per Mercurio, mentre è molto minore per gli altri pianeti, il che spiega perché solo quello di Mercurio fosse stato già osservato. La (8–21) porta a una precessione di $42.98''$ per secolo: le misure più recenti sono in accordo con la teoria entro $10^{-4}$.

In seguito la precessione è stata osservata anche per Venere, Terra e Marte. Per questi pianeti l'avanzamento calcolato è rispettivamente di $8.62''$, $3.84''$ e $1.35''$ per secolo; l'accordo con le osservazioni è ottimo entro gli errori, che ammontano a circa $0.1''$ per secolo.