CAPITOLO 12

Stelle statiche a simmetria sferica

Come prima applicazione astrofisica della RG studieremo il modello più semplice possibile: una stella *statica* e dotata di *simmetria sferica.* Adotteremo quindi coordinate polari per lo spazio, più la coordinata t. Dalle ipotesi fatte segue che la metrica in queste coordinate può sempre essere messa nella forma

$$d\tau^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 \bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta \, d\varphi^2\bigr) \tag{12–1}$$

dove Φ e Λ dipendono solo da r.

L'interpretazione delle coordinate è del tutto simile a quella vista nel Cap. 5, con la sola differenza che ora la (12–1) può essere usata in tutto lo spazio-tempo, senza alcuna singolarità apparente, grazie alla presenza della materia. S'intende che la materia della stella occuperà solo una sfera centrale, circondata da spazio vuoto: dobbiamo dunque aspettarci che al di là di un certo $r = R$ ("raggio" della stella) la metrica si riduca a quella di Schwarzschild, e più in particolare che sia

$$\lim_{r\to\infty} \Phi = \lim_{r\to\infty} \Lambda = 0.$$

La novità essenziale è la presenza della materia: la metrica (12–1) sarà soluzione delle equazioni di Einstein con un secondo membro (tensore energia-impulso) caratteristico del genere di materia presente. In quasi tutte le condizioni conosciute, anche alle più grandi densità, la materia in un interno stellare è assimilabile a un *fluido perfetto*: adotteremo perciò tale ipotesi.

Il fluido perfetto relativistico

Riprendiamo dunque la (11–12):

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + p)\, u^\alpha u^\beta - p\, g^{\alpha\beta}. \tag{12–2}$$

Quest'espressione di $\mathbf{T}$ vale al di là del caso particolare che c'interessa: non occorre né la simmetria, né condizioni statiche. Comunque il fluido si muova (e anche se non è omogeneo) sarà sempre possibile trovare in ogni punto un RIL di quiete, ecc. Solo che densità e pressione varieranno in generale da punto a punto e anche nel tempo. Nel nostro caso ovviamente entrambe le grandezze dipendono solo da r.

È interessante studiare le equazioni che risultano dall'annullare la divergenza di $\mathbf{T}$:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = (\varrho + p)_{,\beta}\, u^\alpha u^\beta + (\varrho + p)\, u^\alpha{}_{;\beta} u^\beta + (\varrho + p)\, u^\alpha u^\beta{}_{;\beta} - p_{,\beta}\, g^{\alpha\beta} = 0. \tag{12–3}$$

(abbiamo tenuto conto che $g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$, come visto alla fine del Cap. 9).

Per interpretare la (12–3) conviene anzitutto proiettarla lungo $\mathbf{u}$, moltiplicando per u_α:

$$(\varrho + p)_{,\beta}\, u^\beta + (\varrho + p)\, u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta} u^\beta + (\varrho + p)\, u^\beta{}_{;\beta} - u^\beta p_{,\beta} = 0$$

(abbiamo usato $u_\alpha u^\alpha = 1$). Inoltre $u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta} = 0$ perché $u_\alpha u^\alpha$ è costante, e si arriva a

$$\varrho_{,\beta}\, u^\beta + (\varrho + p)\, u^\beta{}_{;\beta} = 0. \qquad (12\text{–}4)$$

Sulla curva oraria di un elemento del fluido abbiamo $u^\beta = dx^\beta/d\tau$; quindi

$$\varrho_{,\beta}\, u^\beta = \frac{\partial \varrho}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{d\varrho}{d\tau}$$

e si ottiene infine

$$\frac{d\varrho}{d\tau} + (\varrho + p)\, \nabla\!\cdot\mathbf{u} = 0. \qquad (12\text{–}5)$$

La (12–5) è assai simile all'equazione di continuità della meccanica dei fluidi newtoniana: la differenza è $\varrho + p$ in luogo della sola ϱ nel secondo termine. Ciò si spiega perfettamente ricordando che mentre la ϱ della meccanica newtoniana è la densità di massa, e la massa si conserva, invece ora ϱ è la densità di energia. Pensando ad es. a un gas, in ϱ conta, accanto alla massa di riposo delle molecole, anche la loro energia cinetica; se abbiamo invece una radiazione elettromagnetica "nera" ϱ sarà la densità di energia dei fotoni, ecc. Ora l'energia di una data porzione di materia non si conserva se ci sono scambi con l'esterno. Noi abbiamo escluso trasporto di energia (ad es. sotto forma di calore) avendo preso $\mathbf{T}$ diagonale; ma non possiamo escludere il lavoro delle forze di pressione.

Questo è il significato del termine $p\,\nabla\!\cdot\mathbf{u}$ nella (12–5). Si può infatti dimostrare che se V è un volumetto che si muove col fluido,

$$\nabla\!\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau} \qquad (12\text{–}6)$$

e la (12–5) diventa:

$$V \frac{d\varrho}{d\tau} + (\varrho + p) \frac{dV}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}(\varrho V) + p \frac{dV}{d\tau} = 0. \qquad (12\text{–}7)$$

Si vede ora che la (12–7) esprime la conservazione dell'energia, ossia il primo principio della termodinamica, per il fluido contenuto nel volume V. Infatti il primo termine è la variazione di energia nel tempo, e il secondo il lavoro delle forze di pressione, cambiato di segno. Non è presente il termine relativo al calore scambiato, perché in $\mathbf{T}$ non è stato incluso alcun trasporto di energia: $\vec{S} = 0$.

Se ora si moltiplica la (12–4) (che è un'equazione scalare) per u^α e la si sottrae dalla (12–3), si ha:

$$(\varrho + p)\, u^\alpha{}_{;\beta}\, u^\beta = p_{,\beta}(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta). \tag{12–8}$$

La (12–8) è l'analoga relativistica dell'equazione di Eulero della meccanica dei fluidi. Infatti in un RIL $u^\alpha{}_{;\beta}\, u^\beta$ diventa $du^\alpha/d\tau$ e di nuovo la differenza sta solo nel fattore $\varrho + p$ in luogo del semplice ϱ. Il secondo membro non è altro che la parte del gradiente di p ortogonale a $\mathbf{u}$.

Applicazione al caso statico simmetrico

Per applicare le (12–4), (12–8) al caso che c'interessa non c'è che da sostituire le definizioni, tenendo presente che tutte le grandezze dipendono soltanto da r, e che $\mathbf{u}$ ha diversa da zero solo la componente u^t. Il risultato è

$$(\varrho + p)\, \Phi_{,r} = -p_{,r}. \tag{12–9}$$

In approssimazione non relativistica $p \ll \varrho$ e la (12–9) si riduce all'equazione dell'idrostatica, a condizione che Φ si riduca al potenziale gravitazionale newtoniano. Ma è quello che succede se il campo è debole: infatti in quest'approssimazione dovrà anche essere $|\Phi| \ll 1$ da cui $g_{tt} \simeq 1 + 2\Phi$, e confrontando con la (10–18) si ha proprio $\Phi = V$.

Invece la (12–4), o l'equivalente (12–5), nel nostro caso non dice niente: infatti $d\varrho/d\tau = 0$ per l'ipotesi statica, mentre $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ per la (12–6). La cosa si spiega intuitivamente guardando la (12–7): l'energia nel volumetto V non cambia se il sistema è statico, mentre d'altra parte non c'è lavoro delle forze di pressione se il volume non varia. Dunque entrambi i termini sono separatamente nulli.

Le equazioni di Einstein

A causa delle condizioni particolari del nostro problema, le equazioni di Einstein indipendenti sono ben poche: si verifica infatti che

- le componenti fuori diagonale di $G^{\alpha\beta}$ sono identicamente nulle, come quelle di $T^{\alpha\beta}$
- delle altre, solo due sono non banali: quelle per G^{tt} e G^{rr}, mentre le rimanenti due sono conseguenza dell'annullarsi della divergenza di $\mathbf{G}$.

Tralasciamo il calcolo esplicito, e diamo i risultati: da $G^{tt} = 8\pi\, T^{tt}$ si ha

$$2r\, \Lambda_{,r} - 1 = \bigl(8\pi r^2 \varrho - 1\bigr) e^{2\Lambda} \tag{12–10}$$

mentre da $G^{rr} = 8\pi\, T^{rr}$ si ottiene

$$2r\, \Phi_{,r} + 1 = \bigl(8\pi r^2 p + 1\bigr) e^{2\Lambda}. \tag{12–11}$$

È conveniente introdurre, al posto di Λ, la nuova funzione incognita $m(r)$, definita da

$$m = \tfrac{1}{2} r \left(1 - e^{-2\Lambda}\right) \qquad e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \tag{12–12}$$

col che le (12–10), (12–11) diventano rispettivamente

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varrho \tag{12–13}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r\,(r - 2m)}. \tag{12–14}$$

Di solito si usa, al posto della (12–14), l'equazione che ne risulta sostituendoci la (12–9):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(m + 4\pi r^3 p)\,(\varrho + p)}{r\,(r - 2m)} \tag{12–15}$$

che si chiama *equazione di Oppenheimer–Volkov.*

Discussione

Le (12–13), (12–15) sono le equazioni fondamentali del modello statico a simmetria sferica. Dato che le funzioni incognite sono tre (m, ϱ, p) due equazioni non sono sufficienti. Quella che manca è un'*equazione di stato*, ossia una relazione fra ϱ e p. Ciò del resto è del tutto ragionevole: non si può pretendere di risolvere la struttura di una stella senza avere alcuna informazione sulla materia di cui è costituita!

Infine, usando le (12–9), (12–12) si arriva a calcolare anche Φ e Λ, ossia la metrica: il modello riesce così completamente determinato.

Per integrare le (12–13), (12–15) occorrono ovviamente le condizioni iniziali, ad es. $m(0)$, $p(0)$. Il valore iniziale di m si trova osservando che se non si vogliono singolarità nella metrica per $r = 0$ occorre $m(0) = 0$; quanto a $p(0)$ si tratta invece di un *parametro libero* del modello, che permette di studiare stelle di massa totale diversa. Lo indicheremo in seguito con p_{c}.

Supponiamo infatti che l'equazione di stato fornisca $\varrho(p)$ come funzione crescente per tutte le p positive: allora integrando la (12–13) si trova una $m(r)$ che va inizialmente come r^3, e comunque sempre crescente. Se si guarda poi la (12–15), si vede che p è strettamente decrescente, e anzi la sua derivata cresce con r in modulo. È dunque certo che esiste un $r = R$ per cui p si annulla: questo punto è il confine della stella, e il valore $M = m(R)$ è la già citata *massa totale* della stella. Questa denominazione si giustifica osservando l'espressione della metrica: per $r > R$ le (12–12) e (12–14) danno

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r} \qquad e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

e la (12–1) diventa la metrica di Schwarzschild per la massa M. Abbiamo così dimostrato, di passaggio, quanto asserito nel Cap. 5: *la metrica di Schwarzschild è la soluzione statica a simmetria sferica delle equazioni di Einstein per lo spazio vuoto.*

Concludendo: per ogni p_c si determina una massa M e un raggio R della stella: c'è dunque una relazione fra M e R, determinata soltanto dall'equazione di stato assunta per il fluido. A stretto rigore R non è il raggio che si misura ad es. con metodi ottici; ma non è difficile, nota la metrica, calcolare il raggio "vero" a partire da R.

È interessante esaminare più da vicino la forma integrale della (12–13):

$$m(r) = 4\pi\int_0^r \varrho(r')\, r'^2 dr'. \tag{12–16}$$

Superficialmente si potrebbe pensare che la (12–16) dia un'ovvia interpretazione fisica di $m(r)$ come massa totale contenuta nella sfera di raggio r. Però questo non è vero, perché mentre ϱ è la densità (energia di riposo del fluido per unità di volume) non è vero che $4\pi r'^2 dr'$ misuri il volume del guscio fra r' e $r' + dr'$. Infatti manca il fattore e^Λ richiesto dalla metrica.

In altri termini, possiamo scrivere

$$m(r) = 4\pi\int_0^r e^{-\Lambda} \varrho(r')\, e^\Lambda r'^2 dr'$$

ossia $m(r)$ è l'integrale di volume di $e^{-\Lambda}\varrho(r')$. Eppure abbiamo mostrato sopra che M è veramente la massa della stella!

Il paradosso si risolve ricordando le considerazioni fatte al cap. precedente. Supponiamo, per fissare le idee, che il fluido consista di polvere, ossia di particelle ferme non interagenti. Allora l'integrale di ϱ darà la somma delle masse di riposo delle particelle, e non dobbiamo aspettarci che questa somma coincida con la massa totale: ne differirà per l'energia di legame gravitazionale. Infatti, nel caso limite di campo debole ($\Lambda \ll 1$) avremo

$$e^{-\Lambda}\varrho \simeq \left(1 - \frac{m}{r}\right)\varrho = \varrho - \frac{m\varrho}{r}.$$

Il primo termine è la somma delle masse di riposo delle particelle per unità di volume; il secondo è la loro energia potenziale gravitazionale nel campo prodotto dalla materia interna al raggio r.

Il modello di Schwarzschild

Per approfondire la discussione, studiamo brevemente il più semplice modello risolubile analiticamente: quello di Schwarzschild, nel quale si assume come equazione di stato semplicemente $\varrho = \text{cost}$. Non ci occupiamo qui di quanto un tale modello possa approssimare la realtà.

Con l'ipotesi fatta, la (12–13) s'integra immediatamente:

$$m(r) = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\, r^3$$

da cui anche

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\, R^3. \tag{12–17}$$

Sostituendo queste nella (12–15):

$$\frac{dp}{dr} = -\tfrac{4}{3}\pi r\, \frac{(\varrho + p)\,(\varrho + 3p)}{1 - 2Mr^2/R^3}. \tag{12–18}$$

La (12–18) s'integra senza difficoltà:

$$\frac{\varrho + 3p}{\varrho + p} = A\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}$$

dove A è una costante d'integrazione che si determina imponendo $p(R) = 0$:

$$A = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}$$

e infine:

$$p(r) = \varrho\, \frac{\sqrt{1 - 2Mr^2/R^3} - \sqrt{1 - 2M/R}}{3\sqrt{1 - 2M/R} - \sqrt{1 - 2Mr^2/R^3}}. \tag{12–19}$$

Dalla (12–19) si ottiene in particolare

$$p_{\mathrm{c}} = \varrho\, \frac{1 - \sqrt{1 - 2M/R}}{3\sqrt{1 - 2M/R} - 1}$$

che può essere invertita:

$$\frac{M}{R} = \frac{2p_{\mathrm{c}}\,(\varrho + 2p_{\mathrm{c}})}{(\varrho + 3p_{\mathrm{c}})^2}.$$

Questa, combinata con la (12–17), permette di esprimere M ed R in funzione di p_{c}:

$$M = \sqrt{\frac{6}{\pi\varrho}}\, \frac{p_{\mathrm{c}}^{3/2}\,(\varrho + 2p_{\mathrm{c}})^{3/2}}{(\varrho + 3p_{\mathrm{c}})^3}$$

$$R = \sqrt{\frac{3}{2\pi\varrho}}\, \frac{\sqrt{p_{\mathrm{c}}\,(\varrho + 2p_{\mathrm{c}})}}{\varrho + 3p_{\mathrm{c}}}.$$

Si vede che tanto M quanto R sono funzioni crescenti di p_c, ma che entrambe hanno un limite finito quando $p_\mathrm{c} \to \infty$:

$$\lim_{p_\mathrm{c}\to\infty} M = \frac{4}{9}\,\frac{1}{\sqrt{3\pi\,\varrho}} \qquad \lim_{p_\mathrm{c}\to\infty} R = \frac{1}{\sqrt{3\pi\,\varrho}}.$$

Questo è un effetto di RG: nel corrispondente modello newtoniano ovviamente M ed R vanno a infinito con p_c. Dunque non è possibile avere una "stella di densità costante" con massa maggiore di un certo valore critico. Si potrebbe credere che il risultato sia poco interessante, dato il carattere artificioso del modello; invece il fenomeno si ripresenta anche con modelli realistici, come vedremo.

A titolo di curiosità, domandiamoci per quale valore di ϱ la massa critica uguaglia una tipica massa stellare, come quella del Sole: il risultato è (ripristinando le unità usuali) $\varrho = 1.2\cdot 10^{16}\,\mathrm{g/cm^3}$, che è una densità non molto superiore a quella della materia nucleare. Troveremo più avanti un valore molto vicino a questo per la densità massima alla quale una stella di neutroni può essere stabile, prima del collasso in un buco nero.