CAPITOLO 17

Modelli cosmologici

Abbiamo già visto nel Cap. 16 che la geometria di Robertson–Walker è usata nei modelli cosmologici: guardiamo ora la questione più da vicino. L'idea di base della RG, che la geometria dello spazio-tempo è determinata dalla distribuzione della materia, richiede — per essere applicata all'Universo — di avere motivazioni fisiche per postulare una qualche distribuzione della materia. A scala relativamente piccola la distribuzione di materia è assai irregolare: le stelle sono raccolte in *galassie*, le quali formano *ammassi* e *superammassi*. C'è poi della materia in forma di polveri e gas, della quale è più difficile determinare la distribuzione; esiste poi il problema della *materia oscura*, sul quale torneremo.

Solo a scala molto più grande è ragionevole supporre che la distribuzione sia all'incirca omogenea. In realtà in tempi recenti si va facendo strada l'idea che anche a grande scala la materia occupi solo la superficie di *bolle* sostanzialmente vuote; resta però il fatto che anche in questo caso conviene cominciare a ragionare su di un modello omogeneo, e poi studiare le alterazioni prodotte su questo modello dalle disomogeneità. Noi qui ci occuperemo solo del punto di partenza omogeneo.

Insieme all'omogeneità si assume anche l'isotropia delle condizioni fisiche dell'Universo, per la quale valgono considerazioni simili a quelle fatte sopra. Abbiamo però già visto al Cap. 16 un forte argomento in favore dell'isotropia, dato dalle misure sulla radiazione di fondo.

Osserviamo inoltre che non si potrebbe avere isotropia senza omogeneità: se infatti due diverse regioni di spazio contenessero materia in condizioni fisiche diverse, guardando in direzione di quelle due regioni si vedrebbero differenze ad es. nella radiazione che arriva. Allora l'Universo non ci apparirebbe neppure isotropo.

Parlando di omogeneità abbiamo trascurato una difficoltà, ossia che l'Universo *non è statico*, com'è messo in evidenza dal redshift cosmologico. Perciò quando si dice "Universo omogeneo" si sottintende che il confronto fra la materia presente in diversi punti dello spazio venga fatto *a un certo tempo*, e noi sappiamo che la RG non ci autorizza a parlare di un tempo assoluto. La soluzione è che stiamo in realtà facendo un'ipotesi più complessa: assumiamo che si possa individuare, nella varietà che costituisce lo spazio-tempo, una famiglia di sezioni spaziali (sottovarietà 3-dimensionali) su ciascuna della quali vale l'omogeneità richiesta.

Tutto questo si riassume nell'enunciato del *principio cosmologico*:

è possibile definire nello spazio-tempo una famiglia di sezioni spaziali, tali che su ciascuna di esse l'Universo ha le stesse proprietà fisiche in tutti i punti e in ogni direzione.

È intuitivo che la geometria corrispondente debba essere a curvatura costante, e quindi descritta da uno dei tre sottocasi della (16–1). Fino a questo punto è però rimasta imprecisata la funzione $R(\eta)$, ossia la legge di evoluzione temporale del raggio dell'Universo. Il calcolo di tale evoluzione (*dinamica cosmologica*) richiede due ulteriori informazioni:

a) una *legge del moto*; questa discende dalle equazioni di Einstein

b) un'*equazione di stato* per la materia: infatti occorre sapere come varia la densità durante l'evoluzione dell'Universo.

Le equazioni di Einstein legano il tensore di Einstein (dipendente dalla metrica) al tensore energia-impulso (dipendente dalle proprietà fisiche della materia presente). Occorre dunque discutere il modello di materia adeguato al nostro problema.

La distribuzione della materia

Alla scala cosmologica, la materia consiste

a) di una "polvere" (galassie o altro) con interazioni trascurabili

b) di radiazione e.m. di corpo nero

c) di altre particelle di massa nulla (neutrini, gravitoni).

Il tutto si riassume nel modello di *fluido perfetto*, per il quale si può scrivere, come sappiamo,

$$\mathbf{T} = (\varrho + p)\,\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - p\,\mathbf{g}.$$

Le velocità relative di galassie e stelle entro gli ammassi sono $\lesssim 10^3\,\mathrm{km/s}$ ($v/c \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$) e perciò il loro contributo ϱ_g a ϱ_m è praticamente tutta massa di riposo, e $p_\mathrm{m} \ll \varrho_\mathrm{m}$, allo stato attuale. Per ϱ_g si può dare una stima intorno a $10^{-30}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.

Esiste però una stima indipendente di ϱ_m, data dalla *dinamica* degli ammassi di galassie. Assumendo che gli ammassi siano sistemi legati, e applicando il teorema del viriale, dall'energia cinetica — che è misurabile in base ai moti delle galassie — si risale all'energia potenziale, e si trova che questa richiede una massa maggiore di quella visibile delle galassie, per circa un fattore 10: si parla perciò di densità *dinamica* $\varrho_\mathrm{d} \simeq 10^{-29}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Non è ancora chiarito di che cosa sia costituita questa *materia oscura*.

La radiazione (e.m.) osservabile è prevalentemente radiazione nera a $2.7\,\mathrm{K}$ ($kT \simeq 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$):

$$\varrho_\mathrm{em} = \frac{8\pi^5}{15\,c^5}\,\frac{k^4}{h^3}\,T^4 = 4 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{g\,cm^{-3}};$$

ci si aspetta poi un contributo più o meno equivalente in neutrini e gravitoni, e perciò

$$\varrho_\mathrm{r} \simeq 10^{-33}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}.$$

Trattandosi di particelle di massa nulla, avremo

$$p_\mathrm{r} = \tfrac{1}{3}\varrho_\mathrm{r}.$$

In realtà il problema della massa dei neutrini è ancora aperto: il limite superiore ricavato da misure di laboratorio è attorno a 10 eV, mentre quello recente ricavato dalle misure sulle oscillazioni è forse 0.01 eV. Se i neutrini avessero massa di quest'ordine o maggiore, rientrerebbero nella materia fredda: infatti avremmo un contributo di ciascun neutrino a ϱ, dalla sua massa di riposo, molto maggiore del kT sopra indicato. Possiamo comunque scrivere:

$$\varrho_\nu \simeq \left(\frac{m_\nu}{1\,\mathrm{eV}}\right) \times 7 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}.$$

Questa stima assume che esistano 3 tipi di neutrini, come sembra ormai certo.

A eccezione dei primi secondi dal *big bang*, gli scambi di energia e impulso tra i diversi tipi di materia sono trascurabili, e perciò possiamo applicare separatamente alle varie frazioni le leggi di conservazione note. Nel caso della materia massiva (barioni, ev. neutrini) la conservazione del numero porta alla conservazione della massa di riposo, ma il volume occupato non è costante (cresce come R^3). Dunque

$$\varrho_\mathrm{m} R^3 = \mathrm{cost.} \tag{17–1}$$

Quanto alla radiazione, se supponiamo conservato il numero di fotoni (come pure di neutrini e gravitoni) e teniamo conto del redshift, troviamo che mentre la densità numerica va come $1/R^3$, la densità di energia (e quindi di massa) ha un altro fattore $1/R$ per il redshift. In totale:

$$\varrho_\mathrm{r} R^4 = \mathrm{cost.} \tag{17–2}$$

Riassumendo, se indichiamo con l'indice $_0$ i valori delle diverse grandezze al tempo presente, abbiamo:

$$\varrho(t) = \varrho_\mathrm{m}(t) + \varrho_\mathrm{r}(t) = \varrho_{\mathrm{m}0}\left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3 + \varrho_{\mathrm{r}0}\left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^4$$

$$p(t) = \tfrac{1}{3}\varrho_\mathrm{r}(t) = \tfrac{1}{3}\varrho_{\mathrm{r}0}\left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^4.$$

Le equazioni di Einstein

In questo capitolo ci converrà usare per la metrica di R–W la forma (16–8):

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2\Big(d\chi^2 + \Sigma^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\right)\Big). \tag{17–4}$$

Ricordiamo che le curve che hanno χ, ϑ e φ costanti sono geodetiche, e che t (tempo cosmico) misura il tempo proprio lungo tali geodetiche. La materia è supposta macroscopicamente in quiete in queste coordinate, che si chiamano perciò coordinate "comoventi." La dinamica è espressa nell'unica funzione incognita $R(t)$.

Dalla metrica (17–4) possiamo calcolare i coefficienti di connessione, e poi il tensore di Riemann e quello di Einstein, in termini di $R(t)$. Si può procedere per "forza bruta," sfruttando al più le evidenti semplificazioni derivanti ad es. dal fatto che la metrica è diagonale, oppure ricorrere a tecniche più sofisticate. Diamo senz'altro le equazioni di Einstein che ne seguono, e che sono soltanto due, nel senso che tutte le altre componenti o sono identiche a queste, o sono della forma $0 = 0$:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\varrho \tag{17–5}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{2R^2} = -4\pi p. \tag{17–6}$$

Osserviamo che dalle (17–5), (17–6) si trae un vincolo per ϱ e p. Basta derivare la (17–5) rispetto a t, ed eliminare $\ddot{R}$ tramite la (17–6), per arrivare a

$$\frac{d}{dt}(\varrho R^3) + p\,\frac{d}{dt}R^3 = 0. \tag{17–7}$$

Si potrebbe verificare che questa è una delle componenti di $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$; ma è più interessante osservare che non ci dice niente di nuovo, in quanto è contenuta nelle (17–1), (17–2). Infatti da un lato $\varrho_{\mathrm{m}} R^3$ è costante per la (17–1), e $p_{\mathrm{m}} = 0$; dall'altro la (17–2), insieme a $p_{\mathrm{r}} = \frac{1}{3}\varrho_{\mathrm{r}}$, mostra che anche ϱ_{r} e p_{r} soddisfano la (17–7).

Il termine cosmologico

Quando Einstein cominciò a pensare all'impiego cosmologico della RG, aveva in mente che l'Universo dovesse essere *statico* e *chiuso*. Statico probabilmente perché nessuno aveva ancora concepito qualcosa di diverso. Chiuso perché era disturbato dalla necessità, che si presentava nel caso opposto, di dover fissare delle condizioni al contorno all'infinito. Ma è facile vedere che le (17–5), (17–6) non ammettono una soluzione con queste proprietà: infatti la (17–5) richiede, per una soluzione statica, $k > 0$ ossia proprio uno spazio chiuso; ma invece la (17–6) richiede $k \le 0$. In altre parole, dovrebbe essere $\varrho + \frac{1}{3}p = 0$.

Su questa base Einstein fu indotto a modificare l'equazione $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$. La modifica è facile: esiste un altro tensore simmetrico a divergenza nulla, oltre a $\mathbf{G}$, ed è il tensore metrico $\mathbf{g}$. Si può dunque scrivere

$$\mathbf{G} - \Lambda\mathbf{g} = \mathbf{T}$$

dove Λ è una nuova costante, detta *costante cosmologica.* Il termine così aggiunto all'equazione ha il nome storico di *termine cosmologico.*

Einstein credette che le equazioni così modificate (con $\Lambda > 0$) non avessero soluzioni in assenza di materia, e ritenne questo un importante argomento a favore della modifica, in quanto sembrava implicare il *principio di Mach*, ossia la dipendenza dell'inerzia di un corpo dalla materia presente nell'Universo. Poco dopo però de Sitter trovò una soluzione in assenza di materia, e Einstein si affrettò a rinnegare il termine cosmologico, definendolo "the greatest blunder of my life." Pochi anni dopo anche il requisito di staticità avrebbe perduto importanza, quando le osservazioni di Hubble e altri mostrarono che in realtà l'Universo non è statico.

Il termine cosmologico è tornato a essere considerato seriamente negli ultimi tempi, ed è per questo che nel seguito ne terremo conto, anche se senza dubbio fa perdere eleganza alla teoria. Fatti i calcoli, le (17–5), (17–6) col termine cosmologico si modificano come segue:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\varrho + \tfrac{1}{3}\Lambda \tag{17–8}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{2R^2} = -4\pi p + \tfrac{1}{2}\Lambda. \tag{17–9}$$

Invece la (17–7) rimane inalterata.

Ne segue che se usiamo le (17–1), (17–2) basta la (17–8), anche se occasionalmente ci farà comodo tener presente anche la (17–9).

Confronto con le osservazioni

Riprendendo la definizione (16–10) della costante di Hubble, abbiamo dalla (17–8):

$$H^2 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\,\varrho + \tfrac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad H_0^2 = \frac{8\pi}{3}\,\varrho_0 + \tfrac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{R_0^2} \tag{17–10}$$

dove l'indice $_0$, come già detto, si riferisce ai valori attuali. Si definisce *densità critica* ϱ_c quel valore di ϱ che corrisponde a $k = 0$, $\Lambda = 0$:

$$\varrho_\mathrm{c} = \frac{3}{8\pi}\,H^2 \qquad \Rightarrow \qquad \varrho_{\mathrm{c}0} = \frac{3}{8\pi}\,H_0^2. \tag{17–11}$$

È poi tradizionale definire il parametro adimensionale Ω come il rapporto $\varrho/\varrho_\mathrm{c}$. Se parallelamente si pone

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \qquad \Omega_\mathrm{k} = -\frac{k}{R^2H^2}$$

le (17–10) si scrivono

$$\Omega + \Omega_\mathrm{k} + \Omega_\Lambda = 1 \qquad \Omega_0 + \Omega_{0k} + \Omega_{0\Lambda} = 1. \tag{17–12}$$

Il valore della costante di Hubble è stato incerto a lungo, principalmente perché è difficile stimare le distanze delle sorgenti lontane. D'altra parte questa costante interviene nella determinazione di molti altri parametri cosmologici, che riescono quindi affetti anch'essi dalla sua incertezza. È invalso l'uso di assorbire l'incertezza di H in un altro parametro adimensionale h, definito da

$$H_0 = 100\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}} \cdot h.$$

Nota: Ricordiamo che il *parsec* (pc) è un'unità di distanza, definito come quella distanza dal Sole dalla quale si vede sotto l'angolo di $1''$ il semiasse dell'orbita della Terra. Dato che $1\,\mathrm{rad} \simeq 2{\cdot}10^5$ secondi d'arco, ne segue che $1\,\mathrm{pc} \simeq 2{\cdot}10^5\,\mathrm{UA}$. Perciò $1\,\mathrm{Mpc} \simeq 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{UA} = 3 \cdot 10^{19}\,\mathrm{km}$.

Dato che ϱ_c dipende da H per definizione (17–11) si ha

$$\varrho_{\mathrm{c}0} = 1.9 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \cdot h^2.$$

Si può poi definire un Ω per ciascuna specie di materia, e i vari parametri vengono determinati da misure indirette; ne vedremo qualcuna — insieme ai migliori valori attuali — nel prossimo capitolo.

Dinamica cosmologica

Vogliamo ora studiare l'evoluzione che risulta dalle equazioni di Einstein per il nostro modello di universo; per far ciò sarà necessario assumere scelte particolari per l'equazione di stato della materia. Sappiamo che al tempo presente la pressione può essere trascurata, ma questo non è più vero quando R è piccolo, perché il contributo della radiazione va come $1/R^4$, e perciò finisce necessariamente per dominare.

È dunque ragionevole supporre che l'equazione di stato reale sia compresa fra due casi estremi:

- $p = 0$ (modello di Friedmann)
- $p = \frac{1}{3}\varrho$ (modello di Tolman).

Come vedremo i due modelli danno andamenti qualitativamente simili: possiamo quindi aspettarci che anche l'evoluzione reale segua lo stesso andamento. In particolare, entrambi i modelli presentano una *singolarità*: su questo punto torneremo più avanti.

È d'uso in cosmologia presentare l'equazione di stato delle diverse possibili specie di materia in una forma comune: $p = w\varrho$, dove $w = 0$ per la materia fredda, $w = \frac{1}{3}$ per particelle di massa nulla. In tal modo si riesce a trattare anche il termine cosmologico come il contributo di una specie di "materia" (o "energia," a scelta): la (17–8) dice che si tratta di una materia *incomprimibile* (densità costante) e allora la (17–7), o anche la (17–9), richiede $w = -1$. Nel seguito però non seguiremo questa convenzione.

Nelle (17–8), (17–9) si vede che tutti i termini sono funzioni decrescenti di R, tranne il termine cosmologico che è costante. Ne segue che questo termine può essere trascurato nelle fasi iniziali dell'evoluzione, di cui ci vogliamo ora occupare.

Il modello di Friedmann

Le equazioni di questo modello sono la (17–5) e la (17–1):

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\varrho$$

$$\varrho R^3 = \text{cost.} = \varrho_0 R_0^3$$

dalle quali si ricava

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi\varrho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3. \tag{17–13}$$

Conviene porre $\frac{8}{3}\pi\varrho_0 R_0^3 = R_*$, dopo di che la (17–13) diventa

$$\dot{R}^2 + k = \frac{R_*}{R}. \tag{17–14}$$

La (17–14) si può integrare elementarmente in tutti i e tre i casi $k = +1, 0, -1$: esaminiamoli separatamente.

Caso $k = 1$

La soluzione si esprime in funzione di una variabile ausiliaria η:

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{2}R_*(1 - \cos\eta) \\ t &= \tfrac{1}{2}R_*(\eta - \sin\eta). \end{aligned} \tag{17–15}$$

Si noti che η è la stessa coordinata temporale usata nella (16–1), e già apparsa nel Cap. 14. La sola differenza è che mentre nello studio del collasso gravitazionale conveniva prendere l'origine di η e di t all'inizio del collasso, ossia al massimo di R, qui abbiamo messo l'origine all'inizio dell'espansione, che è la singolarità accennata sopra (in realtà in questo caso le singolarità sono due: una a $t = 0$ e l'altra a $t = \pi R_*$).

È chiaro dalle (17–15) che R_* è proprio il massimo di R, e che il grafico di R in funzione di t è una cicloide (fig. 17–1). Un universo a sezioni spaziali sferiche è quindi limitato anche nel tempo.

Caso $k = 0$

Ora la soluzione è molto più semplice:

$$R = \left(\tfrac{3}{2}\,R_*^{1/2}\,t\right)^{2/3}. \tag{17–16}$$

Il grafico si trova in fig. 17–2: in questo caso (sezioni spaziali piatte) l'espansione continua all'infinito, anche se con velocità che tende a zero.

Caso $k = -1$

La soluzione ha una forma assai simile alle (17–15), salvo l'uso di funzioni iperboliche:

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{2} R_* (\cosh\eta - 1) \\ t &= \tfrac{1}{2} R_* (\sinh\eta - \eta). \end{aligned} \tag{17–17}$$

Anche qui l'espansione continua all'infinito, ma asintoticamente $R = t$, il che è quanto dire che la velocità di espansione $\dot{R}$ tende a c. Il grafico si vede in fig. 17–3.

È interessante osservare che per t piccolo le soluzioni con $k \neq 0$ non si distinguono da quella con $k = 0$. La cosa si verifica prendendo nelle (17–15), (17–17) i termini di ordine più basso in η e poi eliminando η fra R e t, ma si può dedurre direttamente dalla (17–14), dove il secondo membro è sicuramente dominante, rispetto a k, per R sufficientemente piccolo. In tutti i casi dunque per t piccolo si ritrova la (17–16). Questo è un caso particolare di un risultato generale che discuteremo più avanti.

Il modello di Tolman

Stavolta le equazioni sono la (17–5) e la (17–2):

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\varrho$$

$$\varrho R^4 = \text{cost.} = \varrho_0 R_0^4$$

dalle quali si ricava

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi\varrho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4. \tag{17–18}$$

Conviene porre ora $\frac{8}{3}\pi\varrho_0 R_0^4 = R_*^2$, e la (17–18) diventa

$$\dot{R}^2 + k = \frac{R_*^2}{R^2}.$$

Anche questa si può integrare in tutti i e tre i casi $k = +1, 0, -1$. Si trova:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{t\,(2R_* - t)} \qquad && \text{per } k = 1 \\ R &= \sqrt{2R_* t} && \text{per } k = 0 \\ R &= \sqrt{t\,(2R_* + t)} && \text{per } k = -1. \end{aligned}$$

L'andamento qualitativo non è diverso da quello del modello di Friedmann: in particolare, per $k = 1$ si ha ancora un massimo $R = R_*$. I grafici sono rispettivamente una semicirconferenza, un arco di parabola e uno d'iperbole equilatera (figure 17–4, 17–5, 17–6). Si presenta di nuovo il fenomeno già visto: per t piccolo i tre casi sono indistinguibili.

La singolarità iniziale

In tutti i casi a $t = 0$ è presente una singolarità, e si potrebbe verificare, calcolando il tensore di Riemann, che si tratta di una singolarità reale. Del resto la cosa è ovvia se si pensa che R è il raggio di curvatura delle sezioni spaziali, e quando questo si annulla non c'è dubbio che ci si debba trovare in una singolarità della geometria.

A rigore occorrerebbe qualche precisazione. In primo luogo per $k = 1$ le singolarità sono due: quella a $t = 0$ (*big bang*) e quella a $t = \pi R_*$ nel modello di Friedmann ovvero a $t = 2R_*$ in quello di Tolman (*big crunch*). Ma anche negli altri casi sarebbe stato possibile dare delle soluzioni in cui R è funzione decrescente di t, e termina in una singolarità *nel futuro*; solo che queste soluzioni hanno $\dot{R} < 0$ a tutti i tempi, e quindi contrastano con le osservazioni.

Più in generale, è immediato concludere dalla (17–5), per qualunque k, che esiste nel passato un t al quale R si annulla. La cosa è ovvia per $k = 0$ o $k = -1$, perché $\dot{R}$ non si annulla mai. Ma anche se $k = 1$, considerato che per le (17–1), (17–2) ϱ va almeno come $1/R^3$, si vede che nel passato $\dot{R}/R$ era maggiore del valore attuale, che è positivo.

L'esistenza delle singolarità potrebbe comunque essere una peculiarità di questi modelli, che hanno un'elevata simmetria, discendente dal principio cosmologico. Si potrebbe sospettare che scostamenti anche piccoli dalla simmetria facciano scomparire le singolarità: in parole povere, se le geodetiche della materia non sono più tutte radiali (nel senso della varietà 4-dimensionale) non è detto che debbano passare tutte per uno stesso punto. Una risposta a questo problema è stata data negli anni '60 dal lavoro di Hawking e Penrose, i quali hanno mostrato che sotto ipotesi precise ma sufficientemente ragionevoli dal punto di vista fisico *una singolarità è inevitabile.*

L'unica via per evitarla è dunque quella di modificare le equazioni. A questo proposito c'è da ricordare quanto abbiamo osservato nel Cap. 3: la RG non considera effetti quantistici, che diventano importanti quando la densità è sufficientemente alta ($\varrho_\mathrm{P} = 5.2 \cdot 10^{93}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$). Introducendo questa condizione in entrambi i modelli si trova un tempo dello stesso ordine: vicino a $T_\mathrm{P}/5 \simeq 10^{-44}\,\mathrm{s}$.

È dunque certo che la RG cade in difetto per tempi vicini alla supposta singolarità, e quindi i teoremi di singolarità di Hawking–Penrose non sono applicabili. La via d'uscita sarebbe quella di avere una teoria quantistica della gravità: obbiettivo che finora non è stato realizzato.

Il problema del "fine tuning"

Abbiamo già notato che in entrambi i modelli, di Friedmann e di Tolman, il comportamento iniziale non dipende da k. Vogliamo ora studiare più da vicino questo fenomeno. Dato che siamo interessati alle fasi iniziali, ancora una volta possiamo trascurare il termine cosmologico.

Riprendiamo la definizione di Ω data in precedenza:

$$\Omega = \frac{\varrho}{\varrho_c} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{\varrho}{H^2} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{\varrho R^2}{\dot{R}^2} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{\varrho R^3}{R\dot{R}^2}\,.$$

Derivando $\ln\Omega$ rispetto a t si ha:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{1}{\varrho R^3}\,\frac{d}{dt}(\varrho R^3) - \frac{\dot{R}}{R} - 2\,\frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = \frac{1}{\varrho R^3}\,\frac{d}{dt}(\varrho R^3) - H - 2\,\frac{\ddot{R}}{HR}\,.$$

Usando la (17–7):

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -\frac{p}{\varrho R^3}\,\frac{d}{dt}R^3 - H - 2\,\frac{\ddot{R}}{HR} = -\frac{3pH}{\varrho} - H - 2\,\frac{\ddot{R}}{HR}$$

e infine, eliminando $\ddot{R}$ con la (17–6) e semplificando:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{\varrho}{H\Omega}\,(\Omega-1)\left(1+\frac{3p}{\varrho}\right) = H\,(\Omega-1)\left(1+\frac{3p}{\varrho}\right).$$

Ancora, essendo $\dot{\Omega} = \dot{R}\,(d\Omega/dR)$:

$$\frac{1}{\Omega(\Omega-1)}\,\frac{d\Omega}{dR} = \frac{1}{R}\left(1+\frac{3p}{\varrho}\right). \qquad (17\text{–}19)$$

Abbiamo ottenuto la (17–19) senza approssimazioni, e senza fare ipotesi sull'equazione di stato. Supponiamo ora che l'espressione in parentesi a secondo membro sia limitata inferiormente, da un $\alpha > 0$: avremo allora

$$\frac{1}{\Omega(\Omega-1)}\,\frac{d\Omega}{dR} \ge \frac{\alpha}{R}$$

dalla quale si vede anzitutto che $d\Omega/dR$ ha sempre il segno di $\Omega - 1$, il che è quanto dire che le soluzioni sono sempre crescenti o sempre decrescenti a seconda che sia $\Omega \gtrless 1$. Si dimostra poi senza difficoltà che in ogni caso $\Omega \to 1$ quando $R \to 0$.

Ad esempio, se poniamo $p = \frac{1}{3}\varrho$, ossia $\alpha = 2$, integrando la (17–19) si trova

$$1 - \frac{1}{\Omega} \propto R^2.$$

Calcoliamo ora il rapporto tra il valore attuale di R e quello al limite di validità della RG:

$$\frac{R_0}{R_{\mathrm{lim}}} \gtrsim \left(\frac{\varrho_{\mathrm{lim}}}{\varrho_0}\right)^{1/4} > 10^{30}.$$

Dato che oggi Ω non è molto diverso da 1, ne segue che inizialmente doveva differire da 1 solo sulla 60-ma cifra!

Si può obiettare che $p = \frac{1}{3}\varrho$ è la condizione caratteristica di un universo dominato dalla radiazione, cosa certamente falsa al tempo presente. Però anche se si limita il calcolo alla fase in cui la radiazione è dominante, e lo si modifica per i tempi successivi, non si ottiene un risultato sostanzialmente diverso. Questo perché nella (17–19) è ovviamente più importante la fase in cui R è piccolo.

Poiché non sembra ragionevole un tale "aggiustamento fino" del valore iniziale di Ω, si deve cercare un'altra strada, che passa chiaramente per la negazione dell'ipotesi fatta sopra, che sia sempre $1 + 3p/\varrho \geq \alpha > 0$. Occorre che vi siano fasi dell'evoluzione dell'universo in cui al contrario $1 + 3p/\varrho < 0$, il che implica pressione negativa. Sono questi i *modelli inflazionari*, di cui qui non possiamo parlare.