E. Fabri *giugno 2013*

Risoluzione di un sistema di PDE

Posizione del problema e primo passo di soluzione

Il sistema è questo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= -v\,\frac{\partial y}{\partial x} + k_1(y-z)\\ \frac{\partial z}{\partial t} &= k_2(z-y)\end{aligned}\tag{1}$$

dove v, k_1, k_2 sono costanti assegnate. Delle condizioni al contorno discuteremo dopo.

La prima cosa da fare è cercare di semplificare il sistema con un cambiamento delle variabili indipendenti. Tenterò la sostituzione

$$\begin{aligned}\tau &= at + bx\\ \xi &= ct + dx.\end{aligned}$$

Converrà per chiarezza porre anche

$$\begin{aligned}y(t,x) &= f(\tau,\xi)\\ z(t,x) &= g(\tau,\xi).\end{aligned}$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial t} = a\,\frac{\partial f}{\partial \tau} + c\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = b\,\frac{\partial f}{\partial \tau} + d\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial t} = a\,\frac{\partial g}{\partial \tau} + c\,\frac{\partial g}{\partial \xi}\\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = b\,\frac{\partial g}{\partial \tau} + d\,\frac{\partial g}{\partial \xi}\end{aligned}$$

e il sistema (1) si scrive

$$\begin{aligned}(a+bv)\,\frac{\partial f}{\partial \tau} + (c+dv)\,\frac{\partial f}{\partial \xi} &= k_1(f-g)\\ a\,\frac{\partial g}{\partial \tau} + c\,\frac{\partial g}{\partial \xi} &= k_2(g-f).\end{aligned}\tag{2}$$

Scelta della trasformazione

Come si vedrà subito, conviene fare

$$a + bv = k_1 \qquad c + dv = -k_1 \qquad a = c = k_2$$

ossia

$$a = c = k_2 \qquad b = \frac{k_1 - k_2}{v} \qquad d = -\frac{k_1 + k_2}{v}.$$

La trasformzione di coordinate è quindi

$$\tau = k_2\, t + \frac{k_1 - k_2}{v}\, x$$
$$\xi = k_2\, t - \frac{k_1 + k_2}{v}\, x$$

e le (2) si riducono a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\partial f}{\partial \xi} &= f - g \\ \frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{\partial g}{\partial \xi} &= g - f. \end{aligned} \tag{3}$$

Sommando le (3):

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(f + g) - \frac{\partial}{\partial \xi}(f - g) = 0$$

e quindi esiste h tale che

$$f + g = \frac{\partial h}{\partial \xi} \qquad f - g = \frac{\partial h}{\partial \tau}$$

$$2f = \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \qquad 2g = \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \tau}. \tag{4}$$

Sostituendo le (4) in una delle (3) si ottiene l'equazione per h:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} = 2\, \frac{\partial h}{\partial \tau}. \tag{5}$$

Ponendo ora

$$h = H e^{\tau}$$

la (5) diventa

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} = -H. \tag{6}$$

che è l'equazione di Klein–Gordon in $(1 + 1)$ dimensioni.

L'integrale generale

La (6) ammette soluzioni in onde progressive

$$H = \exp[i\,(p\,\xi - q\,\tau)]$$

e in onde regressive

$$H = \exp[-i\,(p\,\xi + q\,\tau)]$$

dove $p > 0$, $q > 0$ e q è determinato dalla relazione di dispersione

$$q^2 = p^2 + 1.$$

L'integrale generale è una sovrapposizione di queste, con coefficienti $\alpha(p)$, $\beta(p)$:

$$H(\tau, \xi) = \int_0^{+\infty} dp\,\left[\alpha(p)\,e^{ip\xi} + \beta(p)\,e^{-ip\xi}\right]\,e^{-iq\tau}. \tag{7}$$

Le funzioni $\alpha(p)$, $\beta(p)$ sono arbitrarie (a parte questioni di convergenza dell'integrale) e verrano determinate dalle condizioni al contorno. Se è richiesto che H sia reale, basterà prendere la parte reale della (7).