E. Fabri *novembre 2012* [*]

Generalità sulle antenne

Definizioni

Resistenza di radiazione R

Per un'antenna trasmittente, è definita in base alla potenza irraggiata W:

$$W = R\,I^2$$

dove I è la corrente efficace in ingresso.

Guadagno G

In una data direzione, viene definito (sempre per un'antenna trasmittente) da

$$S = \frac{G\,W}{4\pi\,r^2}$$

dove S è il flusso di energia a grande distanza r.

Per un radiatore isotropo (inesistente, usato solo per confronti) per definizione $G = 1$.

Area efficace A

Per un'antenna ricevente:

$$W = A\,S$$

dove S è il flusso incidente, W la potenza erogata *a un carico adattato.*

Relazioni, reciprocità

Fra due antenne si ha, per le precedenti definizioni:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\,r^2}\,A_2 G_1 I_1^2 R_1$$

dove 1 è l'antenna trasmittente, 2 la ricevente.

Posto $V_1 = R_1 I_1$ si ha

$$I_2^2 = \frac{1}{4\pi\,r^2}\,A_2 G_1 \frac{V_1^2}{R_1 R_2}.$$

Se definiamo $Z_{12} = V_1/I_2$, $Z_{21} = V_2/I_1$ (impedenze mutue) vale il principio di reciprocità:

$$Z_{12} = Z_{21}$$

[*] Da un manoscritto senza data, presumibilmente attorno 1970.

e quindi

$$A_2 G_1 = A_1 G_2$$

o anche

$$\frac{A_1}{G_1} = \frac{A_2}{G_2}:$$

il rapporto A/G *è lo stesso per tutte le antenne* (in quanto precede è implicito il fatto che ciascuna antenna può essere usata sia come trasmittente sia come ricevente).

Il dipolo elementare

Si dà questo nome a un conduttore rettilineo (lunghezza l) caricato con capacità agli estremi, in modo da assicurare che la corrente sia la stessa lungo tutto il conduttore. Ciò equivale a richiedere che sia $l \ll \lambda$, se λ è la lunghezza d'onda di esercizio.

Il campo elettrico irradiato da un dipolo elementare è diretto nel piano meridiano, e vale

$$E = \tfrac{1}{2}\, Z_0\, \frac{I\, l}{\lambda\, r}\, \sin\vartheta$$

dove ϑ è l'angolo rispetto alla direzione del dipolo. Ho posto

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c = \frac{1}{\varepsilon_0 c} = 377\,\Omega$$

(*impedenza caratteristica del vuoto*).

Usando la relazione generale $S = E^2/Z_0$ e integrando sull'angolo solido si ha quindi

$$W = \tfrac{2}{3}\pi\, Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I^2$$

$$R = \tfrac{2}{3}\pi\, Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

In direzione normale ($\vartheta = \pi/2$) si ha

$$G = 3/2.$$

In ricezione, per la direzione normale:

$$W = \frac{V^2}{4\,R} = \frac{l^2 E^2}{4\,R} = \tfrac{1}{4}\, Z_0\, \frac{l^2}{R}\, S$$

(il fattore 4 deriva dal fatto che l'antenna, ossia un generatore d'impedenza R, è chiuso su un carico di pari impedenza, per avere adattamento). Quindi

$$A = \tfrac{1}{4}\, Z_0\, \frac{l^2}{R} = \frac{3}{8\pi}\,\lambda^2 = G\,\frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

Con ciò abbiamo ricavato il valore della costante A/G:

$$\frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

L'antenna a telaio

Cominciamo dal caso di una singola spira circolare, di raggio ϱ, diametro del filo d. L'area della spira è $\sigma = \pi\varrho^2$. Abbiamo:

$$E = \pi\, Z_0 \,\frac{\sigma}{\lambda^2}\,\frac{I}{r}\,\sin\vartheta$$

dove ora ϑ è l'angolo rispetto alla normale al piano della spira. Ancora:

$$W = \tfrac{8}{3}\,\pi^3 Z_0 \left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right)^2 I^2$$

$$R = \tfrac{8}{3}\,\pi^3\, Z_0 \left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right)^2$$

$$G = \tfrac{3}{2} \quad \text{per} \quad \vartheta = 0.$$

L'induttanza della spira è

$$L = \mu_0\,\varrho \left(\log\frac{16\varrho}{d} - 1.75\right).$$

Se il telaio è fatto di n spire, si ha $\sigma \propto n$ e quindi anche $E \propto n$ mentre $W, R \propto n^2$ e G è indipendente da n. L'induttanza dipende in modo complicato dalla spaziatura delle spire; per accoppiamento stretto si può assumere $L \propto n^2$.

Il paradosso del telaio

Dato che G non dipende dalle dimensioni del telaio e dal numero di spire, lo stesso è vero per A, e sembra di arrivare a un paradosso: l'area efficace e quindi il segnale ricevuto, fissata la lunghezza d'onda, sarebbero gli stessi per qualunque telaio!

Il fatto è che $R \propto n^2\varrho^4$; dunque per ϱ piccolo anche R è piccola, e questo rende problematico l'adattamento d'impedenza. Vediamo un esempio numerico.

Sia $n = 1$, $\sigma = 1\,\mathrm{m}^2$, con $\lambda = 200\,\mathrm{m}$ (onde medie). Si trova $R = 0.78\,\Omega$. Se il diametro del filo è $2\,\mathrm{mm}$, risulta $L = 4.75\,\mu\mathrm{H}$, $\omega L = 44.8\,\Omega$. Si ottiene adattamento d'impedenza se il carico è formato da un parallelo di $C = 2.37\,\mathrm{nF}$ e $R' = 2.6\,\mathrm{k}\Omega$. Si richiede quindi un fattore di merito $Q = 58$, già praticamente impossibile se si tiene conto della resistenza ohmica della spira, che abbiamo trascurato.

Se fosse invece $\sigma = 0.01\,\mathrm{m}^2$ (raggio 10 volte più piccolo) si avrebbe $R = 7.8 \cdot 10^{-5}\,\Omega$, $L = 0.31\,\mu\mathrm{H}$, $\omega L = 2.9\,\Omega$, $C = 36\,\mathrm{nF}$, $R' = 110\,\mathrm{k}\Omega$, e quindi $Q = 6 \cdot 10^4$: un valore irrealizzabile per alcuni ordini di grandezza.

Così il paradosso è risolto: un'antenna a telaio non può essere molto più piccola della lunghezza d'onda, se ci si vuole avvicinare alla sua efficienza teorica.