E. Fabri *ottobre 1989*

Il principio della geodetica e la caduta dei gravi

estratto da: *Per un insegnamento moderno della relatività*

Ricordiamo che secondo il principio della geodetica le linee orarie dei corpi che si muovono sotto l'azione della sola gravità sono geodetiche dello spazio-tempo. Vogliamo applicare questo principio al caso semplice di un moto lungo la verticale, che prenderemo come asse z.

Il fatto che la retta $z =$ cost. nel piano t–z non sia una geodetica significa che se si lascia libero un sasso, questo non resta fermo: se lo si fa partire da un certo punto (ad es. $z = 0$) all'istante t_1 e si vuole che ritorni allo stesso punto all'istante t_2, è necessario lanciarlo verso l'alto e aspettare che ricada. La geodetica di cui stiamo parlando è semplicemente la parabola che descrive il moto di caduta di un grave: con il principio della geodetica non faremo altro che riscoprire che i gravi cadono.

Più esattamente, c'interessa dimostrare che sulla nostra carta — che rappresenta le coordinate di un laboratorio sulla Terra — la linea oraria di un corpo in caduta libera che si trova alla quota z all'istante t_1, e alla stessa quota all'istante t_2, ha una forma ben precisa (incurvata verso il basso) che si ottiene imponendo che si tratti di una geodetica.

Osserviamo ancora che la geodetica che descrive il moto di un corpo è la curva di *lunghezza massima* tra due punti, e non minima (la lunghezza essendo definita dal tempo proprio): per capirlo, basta rifarsi al paradosso dei gemelli (Cap. 6). Occorre dunque trovare, tra le infinite curve che uniscono i due punti dati nel piano t–z, quella cui corrisponde il tempo proprio più lungo.

Il problema principale da risolvere è proprio il calcolo di questo tempo proprio. Noi conosciamo già la risposta in due casi:

a) Riferimento inerziale (in assenza di campo gravitazionale): allora vale la formula (5–2):

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che per piccole velocità si approssima in

$$\Delta\tau = \Delta t \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right). \tag{1}$$

b) Corpo fermo in campo gravitazionale: nel Cap. 13 abbiamo visto la formula del redshift (13–2):

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2}$$

che possiamo riscrivere

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{gh}{c^2}.$$

Questa, insieme con $\nu_2/\nu_1 = \Delta\tau_1/\Delta\tau_2$ ci porta a

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1 \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right).$$

Se dunque t indica il tempo segnato da un orologio al livello del mare ($z = 0$) avremo, all'altezza z:

$$\Delta\tau = \Delta t \left(1 + \frac{gz}{c^2}\right). \tag{2}$$

È facile scrivere una relazione che riassuma i due casi:

$$\Delta\tau = \Delta t \left(1 + \frac{gz}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right). \tag{3}$$

Nella (3) il termine gz/c^2 rappresenta il redshift gravitazionale, mentre il termine $v^2/2c^2$ è la dilatazione relativistica del tempo.

Per il nostro problema, supposto di conoscere la curva, ossia la legge oraria del moto, dovremmo usare la (3) per ogni trattino del moto, e sommare. Ottenuto così il tempo proprio totale, dovremmo cercare per quale legge oraria questo tempo proprio risulta massimo. Si tratta ovviamente di un'impresa impossibile senza strumenti di analisi superiore (calcolo delle variazioni): ma noi otterremo un'idea del risultato semplificando drasticamente il moto reale. Poiché la difficoltà deriva dalla variazione di z e della velocità lungo il moto, supporremo che il moto consista di due fasi in moto uniforme: una di salita, che inizia all'istante $t = 0$ e termina all'istante $t = \Delta t$; e l'altra di discesa, che inizia all'istante $t = \Delta t$ e termina all'istante $t = 2\Delta t$. È ovvio che le due fasi contribuiscono in ugual misura al tempo proprio.

Occupiamoci dunque della sola fase di salita: al termine il corpo raggiunge una quota $h = v\Delta t$ (si parte da $z = 0$). Nella salita z cambia, e per calcolare $\Delta\tau$ dalla (3) prenderemo un valore medio pari ad $h/2$. Esprimeremo anche la velocità in funzione di h e Δt, ottenendo alla fine:

$$\Delta\tau = \Delta t \left(1 + \frac{gh}{2c^2} - \frac{h^2}{2c^2\Delta t^2}\right). \tag{4}$$

Osservando la (4) si vede che $\Delta\tau$ dipende da h per due motivi:

– aumenta con h, a causa del redshift (secondo termine in parentesi)
– diminuisce al crescere di h, a causa della dilatazione relativistica, perché un h più grande richiede una maggiore velocità (terzo termine in parentesi).

Chiaramente c'è un valore di h che dà il massimo $\Delta\tau$: facendo il calcolo si trova $h = \frac{1}{2} g \Delta t^2$, che è proprio il risultato esatto! Non bisogna però prenderlo troppo sul serio, dato che l'abbiamo ottenuto con una serie di semplificazioni e di approssimazioni, che ora è bene ricapitolare.

L'approssimazione di campo gravitazionale uniforme che porta alla (2) è del tutto lecita, come pure quella di piccola velocità, che abbiamo usata per ricavare la (1). Abbiamo poi approssimato il moto reale con due fasi di moto uniforme, e questo è certamente scorretto; infine abbiamo presa una z media uguale ad $h/2$, e anche questo è discutibile. Come capita spesso, i due "errori" si compensano, ma non era scritto che così dovesse essere.

Non è difficile capire che si potrebbe migliorare il procedimento spezzando il moto in 3, 4, o più fasi di moto uniforme; a parte la laboriosità del calcolo, è intuitivo che quando il numero dei tratti aumenta, il risultato si avvicina a quello esatto.

Tuttavia ciò che veramente conta è aver mostrato il concetto base: come si possa ottenere la legge del moto dal principio della geodetica — una volta che fatti sperimentali, o altri ragionamenti, ci abbiano insegnato come calcolare il tempo proprio — senza nessun bisogno di nominare la forza peso, la seconda legge della dinamica, ecc.