Piccoli e grandi numeri in fisica*

E. Fabri

Dipartimento di Fisica dell'Università di Pisa

Spesso chi studia la fisica — e qualche volta anche chi l'insegna — è portato a sottovalutare l'importanza dei dati numerici, in confronto alle leggi. Se è vero che queste costituiscono l'ossatura del discorso fisico, occorre però sempre ricordare che senza i numeri le leggi non dicono niente: anche il più grande principio della fisica è vuoto di significato se non gli si dà forma quantitativa.

Vorrei perciò proporre alcune considerazioni e alcuni esempi circa il ruolo fondamentale che hanno i numeri nella comprensione della fisica, scegliendoli in modo da uscire dalle occasionali esemplificazioni che si possono trovare in tanti problemi dei testi consueti, dove i numeri sembrano solo un pretesto — nel caso migliore — per far prendere confidenza con le unità di misura.

Unità arbitrarie e unità "fisiche"

Occorre appena precisare che in questo contesto quando dico "numero" intendo la misura di una grandezza fisica, riferita a un'opportuna unità di misura. Il numero che esprime la misura di una certa grandezza può essere piccolo o grande, a seconda dell'unità scelta: ad es. la distanza Terra–Sole è $1.5 \cdot 10^{11}$ m, ma è anche $5 \cdot 10^{-6}$ pc (qui "pc" è l'abbreviazione di "parsec", un'unità di lunghezza molto usata in astronomia). In questo senso sembra che non abbia senso parlare di numeri grandi o piccoli, data l'arbitrarietà delle unità di misura; ma come vedremo, non è sempre così.

Ecco qualche altro esempio (tutti i numeri sono approssimati, per dare poco più dell'ordine di grandezza):

massa della Terra:	$6 \cdot 10^{24}$	kg
velocità della luce:	$3 \cdot 10^{8}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
carica dell'elettrone:	$1.6 \cdot 10^{-19}$	C
numero di Avogadro:	$6 \cdot 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
raggio atomico:	$\sim 1 \cdot 10^{-10}$	m

Sono tutti numeri grandi o piccoli a causa delle unità; non hanno quindi significato in sé. Tuttavia, a ben guardare, ci dicono una cosa: se la grandezza misurata è grande o piccola rispetto alla scala umana. Gli atomi sono piccoli, e la Terra è grande, *rispetto a noi.* Questo accade perché le unità del Sistema Internazionale, sebbene convenzionali, hanno la loro origine storica in campioni a scala umana.

* *La Fisica nella Scuola* **24** (1991), pag. 55.

Così ad es. il metro è una lunghezza vicina al braccio; il chilogrammo è una massa agevole da maneggiare, ecc.

Talvolta però la scelta dell'unità può avere un significato fisico. Ad es. $5 \cdot 10^{-6}$ è piccolo perché il parsec dà un buon ordine di grandezza della distanza media fra le stelle della Galassia (ed è per questo che riesce utile in astronomia), mentre la distanza Terra–Sole è piccola rispetto alla distanza del Sole dalla stella più vicina. E ciò resta vero per l'intero sistema solare. La cosa non è casuale: infatti un sistema planetario non potrebbe essere stabile se la perturbazione gravitazionale da parte delle stelle vicine fosse significativa.

Altro esempio: l'uso dell'elettron-volt (eV) come unità di energia nei fenomeni atomici e molecolari dipende dal fatto che le distanze dei livelli atomici sono di quell'ordine di grandezza, e così pure le energie di legame delle molecole. La relazione con l'unità di potenziale del SI nasce dal fatto che questa rappresenta il valore tipico della f.e.m. delle pile elettrochimiche, la quale a sua volta trae origine dal bilancio energetico di reazioni chimiche: a ogni carica elementare trasportata si trova associata un'energia dell'ordine dell'eV, e perciò la f.e.m. è dell'ordine del volt.

Quando una grandezza fisica è molto grande o molto piccola alla scala umana, nasce un problema: come si può misurarla? In tutti gli esempi visti, come in molti altri, la determinazione della grandezza ha costituito un passo avanti della fisica.

1. *Massa della Terra.* Da $g = GM/R^2$ segue $M = gR^2/G$ e perciò la misura di M si riduce alla misura di g, di R e di G. La prima è facile (pendolo); la seconda risale all'antichità (Eratostene); infine la misura della costante di gravitazione è stata fatta da Cavendish alla fine del '700.

2. *Velocità della luce.* È solo il caso di ricordare la successione storica: da Galileo (che tentò la misura, ma senza successo, perché era al di là delle possibilità del suo tempo), a Roemer, a Fizeau, a Foucault, a Michelson, ecc.: si va dagli inizi del '600 ai tempi attuali.

3. *Carica dell'elettrone.* La prima misura storica consiste nel famoso esperimento di Millikan; ma era anzitutto necessario riconoscere che la carica è quantizzata (v. più avanti).

4. *Numero di Avogadro.* È connesso col problema dell'esistenza degli atomi: gli atomi sono solo comode finzioni della chimica, o esistono realmente? Se esistono, dovrebbe essere possibile misurarne massa e dimensioni: determinare il numero di Avogadro equivale a determinare la massa degli atomi. Si va dalle congetture di Dalton e Avogadro (primo '800) alla grande discussione della fine '800 (Boltzmann sostenitore degli atomi, Mach e Ostwald avversari), fino agli esperimenti di Perrin sul moto browniano e al lavoro teorico di Einstein (inizi del '900).

Le costanti fondamentali

Ci si può ora porre la domanda: esistono numeri con significato assoluto? In altre parole: ci sono grandezze fisiche generali, indipendenti da situazioni contingenti? Queste, come è ben noto, sono le costanti fondamentali (o universali).

Le costanti fondamentali possono comparire in relazioni generali che legano grandezze diverse; esempi sono:

la legge di gravitazione	$F = G m_1 m_2 / r^2$
la relazione di Einstein	$\Delta E = \Delta M \, c^2$
quella di Bohr	$\Delta E = h\nu.$

In altri casi una costante fondamentale può esprimere un aspetto "discreto" della materia: così è per la carica e dell'elettrone.

Alcune costanti fondamentali sono eliminabili scegliendo le unità di misura. L'esempio più ovvio è c, ma lo stesso vale anche per altre:

– se l'unità di lunghezza fosse il "secondo luce", pari a $3.0 \cdot 10^5$ km, avremmo $c = 1$;
– se inoltre prendessimo per unità di massa $4.0 \cdot 10^{35}$ kg, sarebbe anche $G = 1$;
– se invece l'unità di massa fosse $7.3 \cdot 10^{-51}$ kg, avremmo $h = 1$.

Questo non si fa, perché non è pratico, e in ogni modo non si potrebbero eliminare tutte le costanti. È molto più utile ragionare in un altro modo: usando i "numeri puri."

I numeri puri

Un numero puro è una combinazione (monomia) di grandezze fisiche, la cui misura non dipende dalle unità scelte: non contiene perciò niente di arbitrario, e il suo valore, il suo essere grande o piccolo, ha significato fisico.

Un primo esempio di numeri puri è del tutto ovvio: basta fare il rapporto tra due grandezze omogenee. Ad es. la massa del Sole è $3 \cdot 10^5$ volte quella della Terra: $M_\mathrm{S}/M_\mathrm{T}$ è un numero puro significativo per la meccanica celeste, e il fatto che sia grande c'insegna che nel moto della Terra attorno al Sole possiamo supporre (a meno di non chiedere un'alta precisione) che il Sole coincida col centro di massa del sistema. Oppure: il rapporto v/c per le velocità di agitazione termica delle molecole di un gas a temperatura ambiente è dell'ordine di 10^{-6}: dunque la meccanica newtoniana è perfettamente adeguata a questo problema. Lo stesso non accade per il gas di elettroni la cui pressione stabilizza una nana bianca, quando la massa della stella si avvicina al "limite di Chandrasekhar" (v. più avanti).

Numeri puri relativi alla Terra

Un'altra classe di numeri puri interessanti sono quelli costruiti con grandezze caratteristiche di un certo sistema fisico: un esempio è $\omega^2 R/g$, dove le grandezze si riferiscono alla Terra. Questo numero è il rapporto tra l'accelerazione centripeta della rotazione terrestre all'equatore, e l'accelerazione di gravità: vale $3.4 \cdot 10^{-3}$, cioè è piuttosto piccolo. Possiamo dire che la rotazione della Terra è lenta (non alla scala umana, ma in relazione alla forza di gravità); per questo la forma della Terra è poco diversa da una sfera. Se facciamo lo stesso calcolo per Giove, troviamo 0.09, e infatti Giove è molto più schiacciato della Terra. Per nessun pianeta quel rapporto può essere > 1, altrimenti esso non potrebbe stare insieme (o meglio, non si sarebbe neppure formato).

Un altro numero puro relativo alla Terra — e forse più interessante — è GM/c^2R, che vale circa 10^{-9}. Il suo significato si capisce calcolando la velocità di fuga dalla Terra

$$v_{\mathrm{f}}^2 = \frac{2GM}{R}$$

da cui

$$\frac{v_{\mathrm{f}}^2}{c^2} = \frac{2GM}{c^2R}.$$

Dunque $v_{\mathrm{f}} \ll c$. Se invece fosse $v_{\mathrm{f}} > c$, la Terra sarebbe un "buco nero"!

I gas e la gravità

Ancora un altro esempio possiamo trovarlo rispondendo alla seguente domanda: "perché le molecole di un gas si comportano come se fossero senza peso?" La prima risposta: "perché sono molto leggere" non è sufficiente: in primo luogo leggere rispetto a che? e poi non è forse vero che il moto dei gravi non dipende dalla massa? In realtà la spiegazione sta nella loro velocità, o se preferiamo nell'energia cinetica: quello che conta è il rapporto ϱ fra la massima variazione di energia potenziale possibile all'interno del recipiente, e l'energia cinetica media delle molecole:

$$\varrho = \frac{mgh}{kT}$$

(a meno di fattori inessenziali). Ad es. per l'azoto (N_2) a temperatura ambiente ($T = 300\,\mathrm{K}$), e con $h = 3\,\mathrm{m}$ si trova $\varrho = 1.1 \cdot 10^{-4}$. Se invece facciamo $h = 10^4\,\mathrm{m}$, si vede che $\varrho \simeq 1$: infatti a 10 km di altezza la densità dell'atmosfera è circa 1/3 di quella al livello del mare. Si noti che — grazie al teorema di equipartizione — il denominatore non dipende dalla natura delle "molecole"; potrebbe trattarsi di granelli di polvere ($m \sim 10^{-15}\,\mathrm{kg}$): allora $\varrho \sim 10^6$ e infatti la polvere "si posa"!

Per inciso: anche la costante di Boltzmann potrebbe facilmente essere eliminata: basterebbe misurare la temperatura in unità di energia.

Le correnti stazionarie

Un ultimo esempio lo possiamo trarre dalla teoria dei circuiti elettrici. La prima legge di Kirchhoff ci dice che per correnti stazionarie la somma delle correnti in ogni nodo del circuito è nulla. Ma quanto tempo occorre perché una corrente possa dirsi “stazionaria”? In realtà la stessa legge si usa anche per le correnti alternate: come si giustifica ciò? Sia V l'ordine di grandezza delle d.d.p. nel circuito; I quello delle correnti, L la dimensione del circuito, e infine τ la scala dei tempi che interessa. Il confronto va fatto fra la carica trasportata nel circuito nel tempo τ, che è $Q_{\mathrm{t}} = I\tau$, e la carica che può essere accumulata nella capacità elettrostatica. Quest'ultima ha un ordine di grandezza $C = \varepsilon_0 L$ ($\varepsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ è la costante dielettrica del vuoto); perciò la carica sarà $Q_{\mathrm{a}} = CV = \varepsilon_0 LV$ e il rapporto cercato si scrive

$$\delta = \frac{Q_{\mathrm{t}}}{Q_{\mathrm{a}}} = \frac{I\tau}{\varepsilon_0 LV}.$$

Prendendo valori ragionevoli: $I = 1\,\mathrm{mA}$, $\tau = 0.01\,\mathrm{s}$, $L = 1\,\mathrm{m}$, $V = 100\,\mathrm{volt}$, troviamo $\delta = 1.1 \cdot 10^4 \gg 1$. Dunque la carica accumulata è trascurabile, il che non sarebbe più vero se prendessimo $\tau = 1\,\mu\mathrm{s}$. Nel gergo dell'elettronica, questo fatto si esprime dicendo che alle alte frequenze è necessario tener conto delle “capacità parassite”.

Numeri puri e costanti fondamentali

Più importanti sono i numeri puri costruiti con le costanti fondamentali. Poiché nel seguito capiterà spesso di usare l'espressione

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0},$$

converrà indicarla con q, per brevità.

La costante di struttura fina

Un esempio tratto dalla fisica atomica: nel modello di Bohr la velocità orbitale dell'elettrone nello stato fondamentale è $q/\hbar$: allora

$$\frac{v}{c} = \frac{q}{\hbar c}$$

è un numero puro, che di solito s'indica con α e vale $7.3 \cdot 10^{-3}$ (più spesso si scrive $1/137$). La velocità di fuga sarebbe $v_{\mathrm{f}} = v\sqrt{2}$, e il fatto che sia piccola rispetto a c indica che l'elettrone è poco legato: l'interazione elettromagnetica è piuttosto “debole”.

La costante α compare in molte altre relazioni: ad es. quelle fra certe lunghezze caratteristiche dell'elettrone. Partiamo dal “raggio di Bohr”:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_{\mathrm{e}} q} = 5.3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$$

e moltiplichiamo per $2\pi\alpha$: otteniamo

$$\lambda_\mathrm{e} = 2\pi\alpha a_0 = \frac{h}{m_\mathrm{e}c} = 2.4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

che è la ben "lunghezza d'onda Compton" dell'elettrone. Ancora:

$$r_\mathrm{e} = \alpha^2 a_0 = \frac{q}{m_\mathrm{e}c^2} = 2.8 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

è il "raggio classico dell'elettrone", che ci servirà più avanti.

L'energia di legame dell'atomo d'idrogeno vale, come è noto

$$E_0 = \frac{q}{2a_0} = \frac{m_\mathrm{e}q^2}{2\hbar^2} = 13.6\,\mathrm{eV}.$$

Calcoliamone il rapporto con l'energia di riposo dell'elettrone:

$$m_\mathrm{e}c^2 = 5.1 \cdot 10^5\,\mathrm{eV}$$

$$\frac{E_0}{m_\mathrm{e}c^2} = \tfrac{1}{2}\alpha^2 = 2.7 \cdot 10^{-5}.$$

Si ritrova così, da un altro punto di vista, che l'interazione elettromagnetica è debole: l'elettrone ha un'energia di legame che è una piccola frazione della sua energia di riposo.

Se anziché dividere E_0 per α^2 moltiplichiamo, avremo

$$\alpha^2 E_0 = 7.2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$$

e questo è l'ordine di grandezza dell'energia d'interazione fra il momento magnetico di un elettrone e il campo magnetico che esso vede nel suo moto attorno al nucleo. Tale interazione è la causa della *struttura fina* dei livelli atomici; per questo motivo α si chiama "costante di struttura fina".

L'interazione gravitazionale e la massa di Planck

Un altro numero puro della stessa classe è

$$\beta = \frac{q}{Gm_\mathrm{e}^2}$$

che vale $4.2 \cdot 10^{42} \ggg 1$. Esso misura il rapporto fra l'interazione elettrostatica e quella gravitazionale tra due elettroni: l'interazione elettrostatica è *molto molto* più forte di quella gravitazionale.

Possiamo giocare ancora con questo esempio come segue:

$$\beta = \frac{q}{Gm_\mathrm{e}^2} = \frac{q}{\hbar c}\,\frac{\hbar c}{Gm_\mathrm{e}^2} = \alpha\,\frac{\hbar c}{Gm_\mathrm{e}^2}.$$

Di qui si vede che $\hbar c/G$ ha le dimensioni del quadrato di una massa:

$$M_* = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg} = 2.4 \cdot 10^{22}\, m_\mathrm{e}$$

prende il nome di *massa di Planck*. Il fatto che sia di gran lunga maggiore delle masse di tutte le particelle conosciute esprime in un altro modo la piccolezza dell'interazione gravitazionale.

La massa di Planck ci permette un altro esercizio "acrobatico": calcoliamone il rapporto con la massa del protone

$$\gamma = \frac{M_*}{m_\mathrm{p}} = 1.3 \cdot 10^{19}$$

e poi

$$m_\mathrm{p} \left(\frac{M_*}{m_\mathrm{p}}\right)^3 = 3.7 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

che è circa il doppio della massa del Sole! Si tratta di un caso? In realtà quello che abbiamo calcolato è (a parte un fattore 3/4) il "limite di Chandrasekhar", ossia la più grande massa che può avere una nana bianca, prima di collassare in stella di neutroni.

Ultimo esempio: riprendiamo il raggio classico dell'elettrone, e moltiplichiamolo per β. Troviamo:

$$\beta r_\mathrm{e} = \frac{q^2}{G m_\mathrm{e}^3 c^2} = 1.2 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}.$$

Questo è press'a poco l'ordine di grandezza del raggio dell'Universo. Sorge ancora la domanda: si tratta di una coincidenza casuale?

Alcuni decenni fa Dirac ha congetturato che la connessione sia fondamentale; in altre parole, che ci sia qualche legge fisica (per ora sconosciuta) che lega il raggio dell'Universo alle costanti fondamentali. Però il nostro numero, essendo fatto di costanti, non varia nel tempo, mentre il raggio dell'Universo varia (espansione). Dirac ha perciò proposto che una delle "costanti" sia anch'essa variabile, e precisamente G. Sono state condotte ricerche sulla variabilità di G, con risultati incerti: non è stata per ora né smentita né provata. Perciò oggi nessuno sa se la congettura di Dirac sia fondata o no.

Conclusione

Potremmo andare avanti a volontà, prendendo gli esempi da svariati campi della fisica, più o meno avanzati. Il campionario che ho scelto è pressoché casuale, ma dovrebbe aver dato una certa plausibilità alle seguenti tesi:

- la conoscenza e il significato dei numeri, grandi e piccoli, è parte essenziale della comprensione della fisica
- anche a un livello introduttivo è possibile dare alcuni esempi espressivi, che facciano capire il senso dell'asserzione precedente e rendano motivato il lavoro coi dati numerici.