E. Fabri *giugno 2003*

Geodetiche di tipo luce e principio di Fermat

Posizioni

Sia data una geometria statica, in cui esiste quindi un sistema di coordinate tale che

$$d\tau^2 = g_{00}\,dt^2 - g_{ik}\,dx^i\,dx^k \tag{1}$$

con componenti del tensore metrico indipendenti dalla coordinata t. Le geodetiche si ottengono dalla lagrangiana

$$L = \tfrac{1}{2}\,g_{00}\,\dot{t}^2 - \tfrac{1}{2}\,g_{ik}\,\dot{x}^i\dot{x}^k = \tfrac{1}{2}\,g_{00}\,\dot{t}^2 - S$$

con l'ovvia abbreviazione

$$S = \tfrac{1}{2}\,g_{ik}\,\dot{x}^i\dot{x}^k$$

(i punti significano derivate rispetto al parametro affine λ).

È noto che L è costante lungo ogni geodetica; in particolare $L = 0$ sulle geodetiche di tipo luce. Ne segue

$$\dot{t} = \sqrt{2S/g_{00}}. \tag{2}$$

Inoltre, essendo la metrica statica, è anche costante $\partial L/\partial\dot{t} = g_{00}\,\dot{t} = K$. Dunque $S = K^2/(2g_{00})$.

Il teorema

In una metrica statica le geodetiche di tipo luce soddisfano il principio di Fermat, nella forma:

$$\delta\int dt = \delta\int \dot{t}\,d\lambda = \delta\int\sqrt{\frac{2S}{g_{00}}}\,d\lambda = 0. \tag{3}$$

dove la variazione va fatta sulle *traiettorie*, ossia le proiezioni spaziali delle geodetiche, tra estremi fissi.

Dimostrazione

Le equazioni di Lagrange per la metrica (1), relative alle coordinate spaziali, si scrivono

$$-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial S}{\partial\dot{x}^i}\right) = \tfrac{1}{2}g_{00,i}\,\dot{t}^2 - \frac{\partial S}{\partial x^i}$$

o anche, per la (2):

$$-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{g_{00,i}}{g_{00}}\,S - \frac{\partial S}{\partial x^i}. \tag{4}$$

Calcoliamo ora la variazione della (3):

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\sqrt{\frac{S}{g_{00}}}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{\frac{S}{g_{00}}}.$$

Il primo membro si scrive:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{2\sqrt{g_{00}\,S}}\,\frac{\partial S}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{1}{K\sqrt{2}}\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{x}^i}\right)$$

mentre il secondo:

$$\sqrt{\frac{g_{00}}{4S}}\,\frac{S_{,i}\,g_{00} - S\,g_{00,i}}{g_{00}^2} = \frac{1}{K\sqrt{2}}\,\left(\frac{\partial S}{\partial x^i} - S\,\frac{g_{00,i}}{g_{00}}\right)\,.$$

Confrontando, si ritrova la (4), c.v.d.